Министерство образования и науки Украины
Харьковский национальный университет
радиоэлектроники

Белоус Наталья Валентиновна

Множества

Харьков
2010

Содержание

Введение

В повседневной жизни и практической деятельности часто приходится говорить о некоторых совокупностях различных объектов: предметов, понятий, чисел, символов и т.п. Например, совокупность деталей механизма, аксиом геометрии, чисел натурального ряда, букв алфавита. На основе интуитивных представлений о подобных совокупностях сформировалось математическое понятие множества. Большой вклад в теорию множеств внес Георг Кантор. Впоследствии, благодаря его исследованиям, теория множеств стала вполне определенной и обоснованной областью математики, а в настоящее время она приобрела фундаментальное значение. Теория множеств является основанием для всех разделов дискретной математики и компьютерных наук в целом, является одной из основ функционального анализа, топологии, общей алгебры и в настоящее время ведутся глубокие исследования в самой теории множеств, связанные с основаниями математики.

Теория множеств вместе с другими разделами дискретной математики имеют множество полезных приложений в программировании. Так она используется для построения систем управления базами данных, при построении и организации работы компьютерных сетей, в частности сети Интернет.

Теория

Основные понятия и обозначения

Множество является настолько общим и одновременно изначальным понятием, что его строгое определение через более простые понятия дать затруднительно. Поэтому вслед за Г. Кантором, мы принимаем интуитивное представление о ***множестве***, как о совокупности некоторых элементов, вполне определенных в случае каждого конкретного множества.

Определение. ***Элементы множества*** - это объекты, которые образуют данное множество, и могут обладать некоторыми свойствами и находиться в некоторых отношениях между собой или с элементами других множеств.

Пример. Множеством может быть школа, состоящая из элементов множества - учеников и работников школы. Воздух в комнате есть множество газовых молекул и взвешенных пылинок - твердых частиц. В то же время, множество молекул может быть твердым телом.

Обозначения. Множества обозначают заглавными, а элементы множеств - строчными латинскими буквами или строчными латинскими буквами с индексами. Элементы множеств обычно заключаются в фигурные скобки. Например, запись A={a,b,d,h} означает, что множество A состоит из четырех элементов a,b,d,h. В общем виде утверждение, что конечное множество A состоит из n элементов, записывается так: $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$.

Принадлежность элемента множеству обозначается символом $\in$: $a\in A$ (читают: элемент a принадлежит множеству A). В противном случае обозначают $a\not\subset A$ (читают: элемент a не принадлежит множеству A).

В дальнейшем изложении используются следующие общепринятые обозначения основных числовых множеств:

N - множество натуральных чисел, N={1,2,3,…};

Z - множество целых чисел, Z={…,-3,-2,-1,0,1,2,3,…};

Q - множество рациональных чисел. Всякое рациональное число можно представить в виде дроби: a/b, где ;

R - множество действительных чисел. Всякое действительное число можно представить в виде бесконечной десятичной дроби $a,b_1,b_2,b_3,...,b_n,...$, с целой частью $a\in Z$ и $b_k \in=\{0,...,9\}$. Множеству действительных чисел соответствует множество точек на числовой прямой.

Элементами множеств могут быть другие множества, тогда эти элементы могут обозначаться заглавными буквами.

Пример.

A = {D,C}, D={a, b}, C={c, d, e}. При этом $D\in A$, $C\in A$, но $a\not\subset A$ и $c\not\subset A$.

A = {{x,y},z}. Эта запись означает, что множество A содержит два элемента: множество {x,y} и элемент z.

B= {{v}}. Это означает, что единственным элементом множества B является множество {v}.

Одна книга из множества книг в шкафу может рассматриваться как множество страниц.

Конечные и бесконечные множества

Определение. ***Множество*** называется ***конечным***, если оно содержит конечное число элементов и ***бесконечным***, если оно содержит неограниченное число элементов.

Пример. Множество A={1,2,3,4,5,6,7,8,9,0} цифр в десятичной системе счисления конечно, а множество точек окружности бесконечно.

Упорядоченные множества

Упорядоченным считается такое ***множество***, в котором важны не только его элементы, но и порядок их следования во множестве. Например, упорядоченным является множество, в котором каждый элемент имеет свой порядковый номер.

Обозначают упорядоченное множество, как правило, либо круглыми, либо треугольными скобками.

$A = <1,2,3>$, в общем случае: $A = <a_1, a_2, \ldots, a_n>, n \in N$;

B=(a,b,c).

Пример. Рассмотрим упорядоченное множество $A = (a_1, a_2, a_3)$ действий по забиванию гвоздя в стенку, где a_1 - покупка гвоздя, a_2 - поиск молотка, a_3 - удар молотком. Если сначала постучать молотком по стене, а потом пойти в магазин, чтобы купить гвоздь - вряд ли что-нибудь получится.

Упорядоченным считается такое множество, в котором важны не только его элементы, но и порядок их следования во множестве. Указать порядковый номер для всякого вещественного числа на множестве R невозможно, и порядок в R задается с помощью сравнений < и ≤. Поэтому общее определение упорядоченного множества X предполагает, что для всех пар элементов из X определено отношение порядка.

Способы задания множеств

1. Простым перечислением элементов

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Пример. Множество отличников в классе 1а обозначим Z_{1a} и зададим его перечислением: $Z_{1a} = \{Иванов, Петров, Сидоров, Кукушкина\}$.

Способ задания множества перечислением его элементов не пригоден для задания бесконечных множеств и даже в случае конечных множеств часто практически нереализуем. Например, невозможно перечислить множество рыб в Тихом океане, хотя совершенно очевидно, что их число конечно.

2. Описание элементов определяющим свойством:
Множество $X = \{x \mid P(x)\}$, где $P(x)$ означает, что элемент x обладает свойством $P(x)$.

Пример. Множество N_{10} всех натуральных чисел, меньших 10 можно задать так: $N_{10} = \{x \mid x \in N, x\langle 10\}$.

Свойства элементов могут быть заданы не формально, а с помощью описания на естественном языке.

Пример. Множество слонов, множество птиц, множество рыб, множество натуральных чисел N.

Пример. В геометрии часто приходится иметь дело с множествами, заданными своими характеристическими свойствами. Так, окружность есть геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки этой плоскости.

3. Множество может быть задано рекурсивно. В этом случае должен быть задан способ последовательного порождения его элементов.

Пример. Множество значений рекурсивной функции является рекурсивно - заданным множеством $F = \{f_1, f_2, f_3, \ldots\}$.

$$\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_2 = 1 \\ \ldots \\ f_n = 3f_{n-2} + f_{n-1},\ n = 3, 4, \ldots \end{cases}$$

Так, $f_3 = 3f_1 + f_2 = 3x1 + 1 = 4$

$f_4 = 3f_2 + f_3 = 3x1 + 4 = 7$ и т.д.

Понятие рекурсивно заданного множества тесно связано с понятиями функции, алгоритма и формальной системы, которые будут изучаться далее.

При задании множеств могут возникать ошибки и противоречия. Множество задано верно, если для любого элемента можно определить, принадлежит он множеству или нет. Напротив, множество задано неправильно, если для какого-либо элемента нельзя определить его принадлежность множеству.

Пример. Определение множества А как множества, содержащего любые пять чисел, не является правильным, поскольку невозможно определить точно элементы А.

Пример. Множество всех простых чисел является правильным определением множества. Для любого числа можно определить, принадлежит ли оно этому множеству, хотя практически на это может потребоваться очень много времени.

Пример. Множество всех динозавров, живших на Земле, является множеством, заданным верно. Хотя практически невозможно определить элементы этого множества, но теоретически ясно, что если животное, когда-либо жившее на Земле, является динозавром, то оно принадлежит к этому множеству, в противном случае - нет.

Равенство множеств

Определение. *Неупорядоченные множества равны*, если они содержат одинаковый набор элементов.

Обозначается A=B. Если множества не равны, это обозначается $A \neq B$.

Определение. Число элементов в конечном множестве M *обозначается* $|M|$.

Для множеств A и B с бесконечным или большим числом элементов проверка совпадения наборов всех элементов может быть практически затруднительной. Более эффективной оказывается логическая проверка ***двухстороннего включения***. А именно, A=B тогда и только тогда, когда из $x \in A$ следует $x \in B$ и из $y \in B$ следует $y \in A$.

Пример. Пусть заданы множества

A = {1,2,3,4,5};

B - множество натуральных чисел от 1 до 5;

$C = \{c \mid 1 \leq c \leq 5, c \in N\}$;

D = {4,1,5,2,3}.

Эти множества содержат один набор элементов, поэтому A=B=C=D.

При задании множеств могут присутствовать неточности, которые необходимо устранять. Рассмотрим примеры.

Пример. Пусть заданы множества:
A={Иванов, Петров, Сидоров};
B={Иванов, Петров, Сидоров}.

В этом случае A=B, если речь идет об одних и тех же людях. В противном случае $A \neq B$. Такие определения необходимо уточнять, чтобы можно было безошибочно определить элементы множества.

Пример. Рассмотрим множество А остатков, получаемых при последовательном делении натуральных чисел {3,4,5,6,…} на 3. A={0,1,2,0,1,2,0,1,2,0,…}. Это множество содержит всего три элемента: 0, 1, 2. Поэтому его можно записать в виде A={0,1,2}. Аналогично множество D={a,b,b,b,a} можно записать как D={a,b}.

Пример. Пусть задано множество $A=\{x \in N \mid 5 \le x \le 10, x \in N\}$, тогда $|A|=6$.

Пример. Пусть B - множество всех видов шахматных фигур, а C - множество всех шахматных фигур, участвующих в одной игре. Тогда $|B|=6$ (пешка, ладья, слон, конь, ферзь, король), а $|C|=32$ (16 белых и 16 черных).

Включение множеств

Определение. ***Множество А***, все элементы которого принадлежат множеству В, называется ***подмножеством*** множества В.

Обозначение. Нестрогое включение обозначается $A \subseteq B$, означает, что А - несобственное подмножество множества В, возможно совпадающее с В. Строгое включение обозначается $A \subset B$, и означает, что А - подмножество множества В, не совпадающее с В. $A \subset B$ читается "А включено в В".

Отличия $A \subset B$ и $A \subseteq B$ заключается в том, что отношение $A \subseteq B$ допускает и ***тождественность*** (А=В), т.е. любое множество можно рассматривать как подмножество самого себя $(A \subseteq A)$, в то время как символ ***строгого включения*** $(A \subset B)$ ставится тогда, когда мы хотим подчеркнуть, что $A \neq B$, то есть во множестве В содержатся не только элементы множества А. Выполнение соотношений $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$ возможно только при А=В. И обратно, А=В, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Эти соотношения являются признаком ***равенства множеств*** через отношение включения. Заметим, что иногда в литературе символом $\subset$ обозначают "нестрогое" включение, допускающее и равенство множеств. В этом случае символ $\subseteq$ не используется, а строгое включение записывают двумя соотношениями $A \subseteq B$, $A \neq B$.

Пример. Множество положительных чисел R_+ является строгим подмножеством множества действительных чисел: $R_+ \subset R$.

Пример. Обозначим множество учеников некоторого класса через X, множество отличников в этом классе через Y. Тогда $Y \subseteq X$, поскольку множество отличников в классе включено во множество учеников этого класса и теоретически может быть равным ему. Пусть Z - множество учеников школы, которой принадлежит рассмотренный нами класс. Тогда $X \subset Z$. Включение X в Z строгое, поскольку кроме учеников класса X, в школе обязательно присутствуют ученики других классов.

Пример. Множество конденсаторов электронной сети является строгим подмножеством всех ее компонентов.

Универсальное и пустое множества

Определение. ***Универсальным*** называется множество, которое содержит все возможные элементы, встречающиеся в данной задаче. Универсальное множество обозначается символом U.

Заметим, что универсальное множество U может отличаться для каждой отдельной задачи и определяется в условии задачи.

Пример. Рассмотрим некоторую группу студентов. А - множество юношей группы, В - множество отличников. В данной задаче универсальным является множество студентов группы, а множества А и В являются его подмножествами: $A \subseteq U$, $B \subseteq U$.

Определение. ***Пустым*** называется такое множество, которое не содержит никаких элементов. Пустое множество обозначается специальным символом $\varnothing$.

Роль пустого множества $\varnothing$ аналогична роли числа нуль. Это понятие можно использовать для определения заведомо несуществующей совокупности элементов (например, множества зеленых слонов). Более существенным мотивом введения пустого множества является то, что заранее не всегда известно (или неизвестно вовсе) существуют ли элементы, определяющие какое-то множество. Например, множество выигрышей в следующем тираже спортлото на купленные билеты может оказаться пустым. Пустое множество $\varnothing$ является подмножеством любого множества, т.е. $\varnothing \subseteq A$, где А - любое множество. Следует помнить, что пустое множество является множеством, поэтому если некоторое множество А не содержит ни одного элемента, то $A = \varnothing; |A| = 0$. Запись $A = \{\varnothing\}$ означает, что А содержит один элемент - $\varnothing$, $|A| = 1$.

Таким образом, любое непустое множество обязательно имеет, как минимум, два подмножества - пустое множество и само это множество. Большое значение для решения многих задач имеет исследование всех возможных подмножеств некоторого множества.

Определение. Множество всех подмножеств множества X назовем ***множеством-степенью X*** или ***булеан X*** и *обозначим* P(X).

Пример. Пусть задано множество A={a,b,c}. Тогда $2^A = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$.

Пустое множество имеет только одно подмножество - само пустое множество, поэтому $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$. Для произвольного множества X из n элементов еколичество всех его подмножеств равно: $|2^X| = 2^{|X|} = 2^n$

Диаграммы Венна

Для наглядного изображения соотношений между подмножествами универсального множества используются диаграммы Венна и круги Эйлера.

Построение диаграммы Венна заключается в разбиении плоскости на 2^n ячеек с помощью n фигур. Каждая фигура на диаграмме представляет отдельное множество, n - число изображаемых множеств. Разбиение производится таким образом, что для любого набора этих фигур существует одна и только одна ячейка, точки которой принадлежат всем фигурам из набора и не принадлежат другим. Плоскость, на которой изображаются фигуры, представляет универсальное множество U. Таким образом, точки, не принадлежащие ни одной из фигур, принадлежат только U. Диаграмма Венна для двух множеств A и B выглядит следующим образом.

Рисунок 1 - Диаграмма Венна для двух множеств A и B

С помощью диаграмм Венна можно графически показать принадлежность некоторого элемента $x \in U$ рассматриваемым множествам. Например, на рисунке 1 элемент x_1 принадлежит A и не принадлежит B, x_2 принадлежит A и B, x_3 принадлежит B и не принадлежит A, x_4 не принадлежит ни A, ни B. Любой элемент принадлежит универсальному множеству U.

Диаграмма Венна для трех множеств A, B и C выглядит следующим образом.

Рисунок 2 - Диаграмма Венна для трех множеств A, B и C

На рисунке 2 элемент x_1 принадлежит множествам A, B и C. Элемент x_2 принадлежит B и C, и не принадлежит A.

Диаграмму Венна для четырех множеств A, B, C и D можно изобразить следующим образом.

Рисунок 3 - Диаграмма Венна для четырех множеств A, B, C и D

На рисунке 3 в качестве примера изображен элемент x_1 , принадлежащий всем четырем множествам: A, B, C и D. Для более ясного представления, заштрихуем каждую область этой диаграммы, используя более густую штриховку там, где точки принадлежат большему числу множеств (рисунок 4).

Рисунок 4 - Диаграмма Венна для четырех множеств A, B, C и D

Операции на множествах

Множества рассматриваются как объекты, над которыми можно производить операции, аналогичные операциям стандартной арифметики:

- объединение,
- пересечение,
- разность,
- дополнение.

Определим операции над множествами. Для наглядного представления операций будем использовать диаграммы Венна, в которых круги изображают множества, участвующие в операции, а заштрихованная часть - результат операции.

Объединение множеств

Определение. ***Объединение (сумма)*** $A \cup B$ есть множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые входят либо в A, либо в B, либо в A и B одновременно.

Рисунок 5 - Диаграмма Венна для множества A∪B

Пример. Пусть даны множества A={a, b, m}; B={n, c, p}, тогда их объединение $A \cup B = \{a, b, c, m, n, p\}$

Пример. Пусть даны три множества среди всех учеников некоторой школы:
A - множества успевающих учеников,
B - множества девочек,
C - множества неуспевающих мальчиков.
Множество всех учеников школы является суммой этих трех множеств: $D = A \cup B \cup D$

Пересечение множеств

Определение. ***Пересечение (произведение)*** $A \cap B$ есть множество, состоящее только лишь из элементов, входящих в A и B одновременно.

Рисунок 6 - Диаграмма Венна для множества $A \cap B$

Пример. $A = \{1, 2, ..., 59\}; B = \{2, 4, ..., 80\}; A \cap B = \{2, 4, ..., 58\}$

Пример. Пересечением множеств A и B учеников школы, где A - множество успевающих учеников, а B - множество девочек, будет множество F успевающих девочек.

Разность множеств

Определение. ***Разность*** A\B есть множество, содержащее все элементы A, не входящие в B.

Рисунок 7 - Диаграмма Венна для множества A\B

Пример. A = {a, b, ..., p}; B = {a, b, ..., k}; A \ B = {l, m, n, o, p}

Пример. Разностью множеств А и В учеников школы, где А - множество успевающих учеников, а В - множество девочек, будет множество G успевающих мальчиков.

Дополнение множеств

Определение. ***Дополнение (отрицание)*** $\overline{A}$ (читается "не А") есть множество U\A.

Рисунок 8 - Диаграмма Венна для множества

Разность множеств можно выразить через операции отрицания и пересечения следующим образом:

Пример. Будем производить действия на множестве целых чисел $Z = \{...,-2,-1,0,1,2,...\}$. В этой задаче U=Z. Пусть Z_- - множество отрицательных чисел и 0, тогда $Z_- = \{..., -2, -1, 0\}$. Дополнением к множеству Z_- будет множество натуральных чисел N={1,2,…}: $\overline{Z_-} = N$.

Пример. Если U - множество студентов университета, то дополнение множества девочек будет множество мальчиков.

Алгебра множеств

Множество 2^U всех подмножеств универсального множества U с заданными на нем четырьмя операциями составляют алгебру множеств.

В общем случае алгебру может составлять любой класс $a \subset 2^U$ подмножеств универсального множества U, замкнутый относительно всех четырех операций. Более того, если универсальное множество U содержится в $a(U \in a)$, то α относительно двух операций отношения (U) и разности (\),чтобы все остальные операции над множествами из α снова давали множества из α. Поэтому определение из алгебры, не содержащее избыточных (точнее, зависимых) ограничений, выглядит следующим образом.

Определение. Класс множеств α называется ***алгеброй (множеств),*** если

1.$U \in a$,

2.Если А, $B \in a$, то $A \cup B \in a$, 3.Если А, $B \in a$, то $A \setminus B \in a$.

Алгебра множеств широко применяется в программировании, в частности при работе с разнообразными базами данных и составляет основу для построения многих математических структур. Вместе с тем, что алгебра множеств имеет основополагающее значение в математике, она очень проста и близка к реальной жизни. Мы ежедневно применяем операции и законы алгебры множеств, не задумываясь об этом. Мы вычитаем из множества задач, которые необходимо решить, множество решенных и приступаем к решению оставшихся. Из них мы, вероятно, в первую очередь выберем те, которые относятся к множеству легких. Мы готовим завтрак, определяя пересечение множества имеющихся продуктов с множеством продуктов, которые нам нравятся. Да и вообще, вся наша жизнь проходит среди множеств, которые как-то взаимосвязаны.

Мы имеем достаточно операций, чтобы составлять сложные алгебраические выражения. Для этого необходимо определить, каким приоритетом обладают операции относительно друг друга.

Приоритет операций

Приоритет операций в алгебре множеств следующий.

1. $\overline{A}$
2. $A \cap B$
3. $A \cup B$
4. $A \setminus B$

Рассмотрим пример.

Пример 1. Пусть нужно расставить скобки (определить последовательность выполнения операций) в формуле:

$$E=A\setminus B\cap\overline{A}\cap D\setminus B,$$

с учетом приоритетов, это следует сделать так:

$$E=(A\setminus(B\cap((\overline{A})\cap D))\setminus B.$$

Законы алгебры множеств

1. ***Коммутативные законы***

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

2. ***Ассоциативные законы***

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

3. ***Дистрибутивные законы***

$$A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

4. ***Свойства пустого и универсального множеств***

$$A \cup \varnothing = A$$

$$A \cap U = A$$

$$A \cup U = U$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

5. ***Законы идемпотентности***

$$A \cap A = A$$

$$A \cup A = A$$

6. ***Закон инволюции***

$$\overline{\overline{A}} = A$$

7. ***Закон противоречия***

$$A \cap \overline{A} = \varnothing$$

8. Закон исключенного третьего

$$A \cup \overline{A} = U$$

8. ***Закон элиминации***

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

10. Законы де Моргана

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Все законы алгебры множеств можно наглядно представить и доказать, используя диаграммы Венна.

Пример. Докажем с помощью диаграммы Венна первый закон де Моргана.

Пример. Доказать с помощью диаграмм Венна дистрибутивный закон.

$$.A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Проиллюстрируем на диаграмме левую часть тождества, выполнив сначала объединение множеств B и C, а затем пересечение с A.

С помощью законов алгебры множеств можно производить эквивалентные преобразования выражений. Рассмотрим такие преобразования на примере.

Пример. Упростить выражение

$\overline{(\overline{A} \cup B \cup C)} \cap (A \cap (B \cup \overline{C})) \cap \overline{B} =$ (применим закон де Моргана)

$(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cap (A \cap (B \cup \overline{C})) \cap \overline{B} =$ (ассоциативность и коммутативность)

$A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap A \cap \overline{B} \cap (B \cup \overline{C}) =$ (используем закон идемпотентности)

$A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap (B \cup \overline{C}) =$ (используем дистрибутивный закон)

$A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap B \cup A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cup \overline{C} =$ (согласно законам пустого множества)

$\varnothing \cup A \cap \overline{B} \cap \overline{C} = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

Ответ: $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

Практика

Примеры решения типовых задач

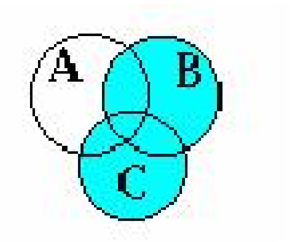
1. Записать множество E, если $E = A \cup B$, причем A={2, 4, 6, 8, 10, 12}, B={3, 6, 9, 12}.
Решение.
$E = A \cup B$ есть не что иное, как объединение множеств A и B, т.е. множество E будет состоять из элементов, принадлежащих как множеству A, так и множеству B: E={2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12}.

2. Записать множество $E = A \cap B$, если A={2, 4, 6, 8, 10, 12}, B={3, 6, 9, 12}.
Требуется выполнить операцию пересечения т.е. множество E будет состоять только из элементов, одновременно входящих как в множество A, так и в множество B: E={6, 12}.

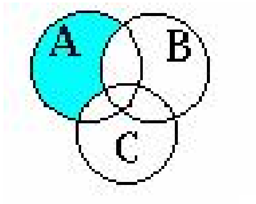
3. Записать множество $E = A \setminus B$, если A={2, 4, 6, 8, 10, 12}, B={3, 6, 9, 12}.
Требуется выполнить операцию разности т.е. множество E будет состоять из всех элементов множества A, не принадлежащих B: E={2, 4, 8, 10}.

4. Записать множество $\mathrm{E} = \overline{\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}}$, если A={2, 4, 6, 8, 10, 12}, B={3, 6, 9, 12}.
Из предыдущего примера имеем $E = A \setminus B = \{2, 4, 8, 10\}$. Для получения окончательного ответа требуется выполнить операцию дополнения т.е. множество E будет состоять из элементов множества B: E={3, 6, 9, 12}.

5. Проиллюстрировать с помощью кругов Эйлера следующую формулу: $E = A \setminus (B \cup C)$
Выполняя действие в скобках $(B \cup C) = E$ получим:



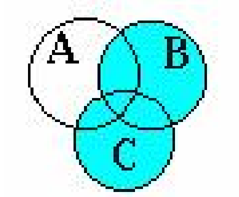
После этого получаем A\E т.е. необходимо выделить участок множества A, не принадлежащий множеству E. Ответ примет форму:



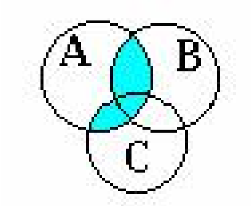
6. Проиллюстрировать с помощью Диаграмм Венна верность тождества:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

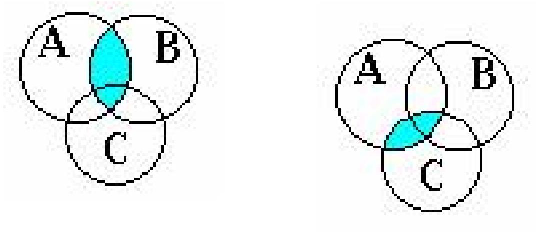
Проиллюстрируем левую часть тождества, обозначив сначала объединение множеств B и C,



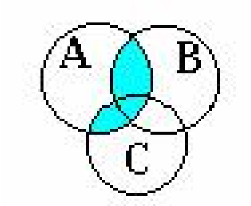
затем пересечение множеств A и $E = B \cup C$. Окончательный вид левой части:



Теперь проиллюстрируем правую часть:

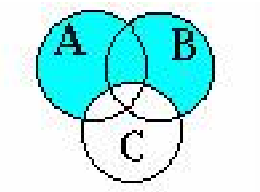


окончательный вид правой части:

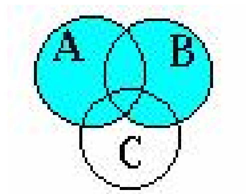


Как видим диаграммы совпадают, следовательно тождество верно.

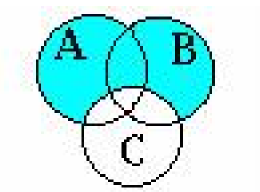
7. По диаграмме Венна записать формулу:



Запишем сначала $A \cup B$,



затем $(A \cup B) \setminus C$, получим:



8. Доказать $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$
Решение.

$$\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}} \Rightarrow \mathrm{A} \setminus (\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) = \mathrm{A} \cap (\overline{\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}}),$$

по закону да Моргана и закону дистрибутивности

$$A \cap (\overline{A \cap \overline{B}}) = A \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) = A \cap B$$

9. Доказать, что $\mathrm{A} = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \setminus \mathrm{B})$, где А и В - множества.
Решение.$\notin$ - по определению операции разности.
Подставим выражение в формулу и вынесем А за скобки:
$(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}) = \mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cup \overline{\mathrm{B}}) = \mathrm{A} \cap \mathrm{U} = \mathrm{A}$

10. Доказать, что $\cap$ тогда и только тогда, когда иначе $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \Leftrightarrow \overline{\mathrm{B}} \subset \overline{\mathrm{A}}$.
Решение. Пусть U - универсальное множество, тогда $\mathrm{A} \subset \mathrm{U}, \mathrm{B} \subset \mathrm{U}$.

$A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.

Пусть $A \subset B \Rightarrow U \setminus B \subset U \setminus A \Rightarrow \quad \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.

Покажем, что $\overline{B} \subset \overline{A} \Rightarrow A \subset B$.

Пусть $\overline{B} \subset \overline{A} \Rightarrow U \setminus B \subset U \setminus A \Rightarrow . \Rightarrow A \subset B$.

Отсюда следует, что $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.

Вопросы

1. Запишите с помощью обозначений утверждение, что элемент a принадлежит множеству A, а элемент b не принадлежит множеству A.

2. Приведите примеры множеств, элементами которых являются множества.

3. Приведите примеры конечных и бесконечных множеств.

4. Какое множество называется упорядоченным?

5. Дать определение множества, подмножества, универсального множества, пустого множества.

6. Какие существуют способы задания множеств?

7. Назовите операции над множествами.

8. Проиллюстрировать на примерах геометрическую интерпретацию множеств.

9. Свойства операций над множествами.

10. Назовите известные вам способы задания множеств. В каком случае не применим тот или иной способ?

11. Какие множества считаются равными?

12. Могут ли два элемента одного множества быть равными?

13. Определите понятия подмножества и включения множеств.

14. Приведите примеры множеств A и B для случаев $A \subseteq B$ и $A \subseteq B$.

15. Чем отличается строгое включение от нестрогого? Приведите пример.

16. Как определяется равенство множеств через понятие нестрогого включения?

17. Какое множество называется универсальным?

18. Как обозначается множество всех подмножеств некоторого множества? Сколько элементов оно содержит?

19. Расположите операции алгебры множеств в соответствии с их приоритетом.

20. Назовите тождества алгебры множеств, запишите соответствующие формулы.

Задания

1. Какие из приведенных ниже соотношений неверны и почему?
а) $x \in \{7, b, x\}$;
б) {1, 2}$\notin$ {9, {1, 2}, 3};

2. Равны ли между собой множества A и B:
а) A={1, 2, 3} и B={3, 2, 1};
б) A={a, c, d, f} и B={a, c, f};
в) A={6, {4, 2}, 1} и B={6, 4, 2, 1}.

3. Упростить формулу: $E = (A \cap B \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$.

4. С помощью диаграмм Венна проиллюстрировать следующие соотношения:
а) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
б) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
в) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
г) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
д) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

5. Задайте перечислением элементов следующие множества:
а) множество натуральных чисел, не больших 7;
б) множество букв Вашего имени;
в) множество, единственным элементом которого является название Вашего города;
г) множество простых чисел между 10 и 20;
д) множество положительных чисел, кратных 12.

6. Задайте в виде $X = \{x \mid P(x)\}$ следующие множества:
а) множество натуральных чисел не больших 100;
б) множество четных положительных чисел;
в) множество натуральных чисел, кратных 10.

7. Перечислите элементы множеств:
а) $\{x \mid x \in N, 3 \le x \le 12\}$;
б) {x | x-десятичная цифра};
в) {x | x=2 или x=5};

8. Определите, элементом каких из приведенных множеств является 2:
а) $\{x \mid x \in N, x > 1\}$;
б) $\{x \mid x = y^2, y \in Z\}$;

в) {2,{2}};
г) {{2},{{2}}};
д) {{{{2}}}}.

9. Определите, какие из следующих утверждений справедливы:
а) $0 \in \varnothing$;
б) $\varnothing = \{0\}$;
в) $|\{\varnothing\}| = 1$;
г) $\{\{\varnothing\}\} \in \{\{\{\varnothing\}\}\}$;
д) $|\{\{\varnothing\}\}| = 2$.
е) $x \in \{x\}$;
ж) $\{x\} \subseteq \{x\}$;
з) $\{x\} \in \{x\}$;
и) $\{x\} \in \{\{x\}\}$.

10. Определите мощности следующих множеств:
а) {x};
б) {{x}};
в) {x,{x}};
г) {{x},x,{{x,{x}}}.

11. Какие из приведенных утверждений верны? Докажите.
а) если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$;
б) если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то A=B;
в) если A⊆B и B⊆C, то A⊆C.

12. Дано множество D={7,13,25,34,101,112}. Какие из приведенных множеств являются подмножествами множества D
а) {1,7,13};
б) {0,1,12};
в) {25, 112, 34};
г) {a, b, c, n};
д) {7,13,25,34,101,112}.
е) ∅.

13. Определите, какие из приведенных множеств равны:
а) A={x | существует y такой, что x=2y, x,$y \in N$ };
б) B={x | x-десятичная цифра $x \in N$ };
в) C={1,2,3};
г) D={0,2,-2,3,-3,4,-4,…};
д) $E = \{2x \mid x \in Z\}$;
е) F={3,3,2,1,3};

14. Постройте 2^A для множества A
а) $A = \{\{\varnothing\}\}$;
б) A={1,2,3,4};
в) A={"день", "ночь"};

г) A={1,{2,3},4};

15. Сколько подмножеств содержит
а) множество дней недели;
б) множество месяцев года.

16. Определите, каким множествам принадлежат элементы $x_1,\dots,x_7$, расположенные на диаграмме Венна, изображенной на рисунке 1.

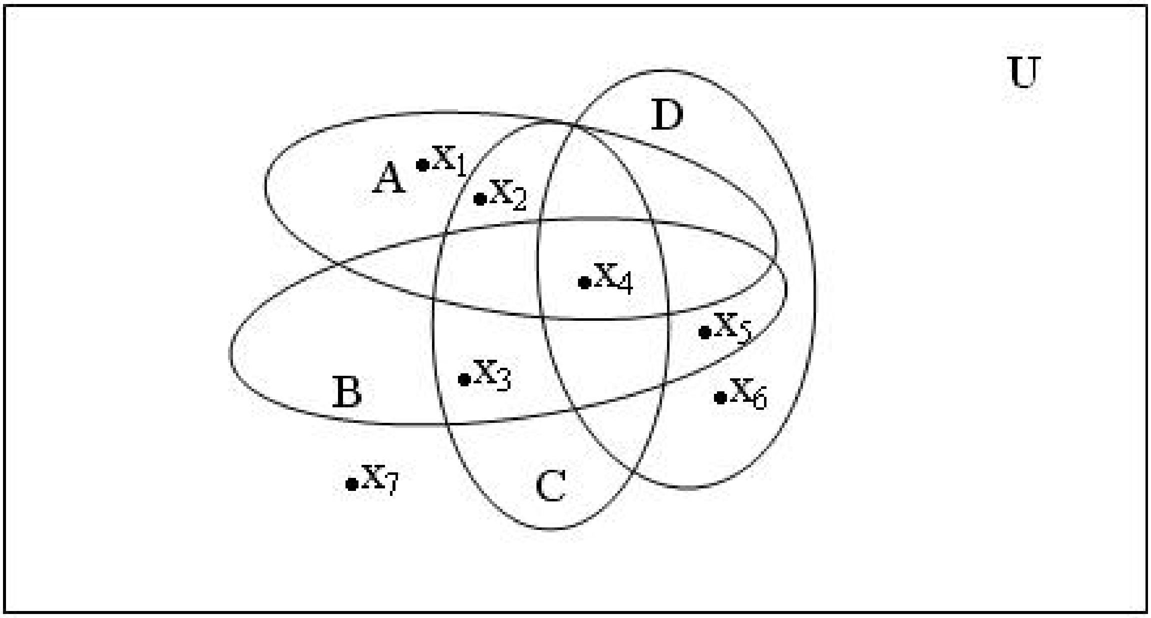


Рисунок 9 - Диаграмма Венна

17.Для множеств A={1,2,3,4,5}, B={0,3,6}, найдите
а) $A \cap B$;
б)$A \cup B$;
в)A\B;
г)B\A.

18. С помощью диаграмм Венна докажите, что A=A;

19. Пусть А - некоторое множество. Найдите значения выражений:
а) $A \cup \varnothing$;
б) $A \cup A$;
в)$A \setminus \varnothing$;
г) $A \cup U$;
д) $A \cap \varnothing$;
е) $A \cap A$ A∩A;
ж) $\varnothing \setminus A$;
з) $A \cap U$;

20. Найдите множества А и В, если A\B={1,5,7,8}, B\A={2,10}, A B={3,6,9}.

21. Пусть A, B и C - множества. Покажите, что
а) $(A \cap B) \subseteq A$;
б) $A \subseteq (A \cup B)$;
в)$(A \setminus B) \subseteq A$;
г) $(A \cup B) \subseteq (A \cup B \cup C)$;
д) $(A \cap B \cap C) \subseteq (A \cap B)$.

22.Какие выводы можно сделать о множествах A и B, если верно следующее
а) $A \cup B = A$;
б) $A \cap B = A$;
в) A\B=A;
г) A\B=B\A.

23. Докажите при помощи эквивалентных преобразований законы элиминации

24. Упростите выражения
а) $\overline{\overline{A} \cup C} \cup (B \cup B \cap C) \cap (\overline{B} \cup \overline{B \cup C})$
б) $(A \cap \overline{B} \cup C) \cap (A \cup B) \cap \overline{C}$
в) $A \cap ((B \cap \overline{C} \cup \overline{C \cup B}) \cap C \cap \overline{A})$
г) $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$

25. В каком отношении находятся множества A и B, если A\B=B\A=∅?

26.Докажите:$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing \Rightarrow \mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{A} \Delta \mathrm{B}$

27. Докажите $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$, где A и B - множества

28.Докажите $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}} = \varnothing$

29.Докажите $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A}$

30.Докажите $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup \mathrm{A} = \mathrm{A}$

31.Докажите $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}) = \mathrm{A}$

32.Докажите $(\overline{\mathrm{A}} \cup \mathrm{B}) \cap \mathrm{A} = \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$

33.Докажите $\mathrm{A} \setminus (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \setminus \mathrm{C})$

34.Докажите $\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \setminus \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \setminus (\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \setminus \mathrm{C})$

35. В результате поиска в Интернете выданы адреса Web-страниц www.cont1, www.cont2, www.cont3, www.st1, www.st2, www.st3, www.inf.ru, www.inf.au, содержащих комбинацию ключевых слов «electronic_libraries». Известно, что страницы с адресами www.cont1, www.cont3, www.st1, www.st2, www.inf.au содержат информацию о книгах по техническим наукам, страницы www.st1, www.st2, www.st3, www.inf.ru, www.inf.au - сведения о периодических изданиях, адрес www.inf.au, указывает на страницу, с информацией об электронных библиотеках Австралии. Найти множество всех адресов, указывающих на страницы, содержащие информацию о периодических изданиях по техническим наукам, исключая издания в Австралии.

36. Сформирруйте следующую задачу в терминах теории множеств.
Имеется набор ключевых слов для поиска в Интернете информации, связанной с современными средствами электронного документооборота. Из этих ключевых слов можно выделить слова, позволяющие найти Web-страницы, содержащие информацию о современных текстовых процессорах, современных средствах хранения документов, способах передачи электронных документов по каналам связи, и некоторые страницы со специфической информацией. Требуется выделить из всех ключевых слов такие, которые позволят находить страницы, не связанные с хранением и передачей документов, однако содержащие сведения о современных текстовых процессорах.

Словарь терминов

Алгебра множеств

Класс множеств $\mathfrak{a}$ называется алгеброй (множеств), если

1. $U \in a$,
2. Если A, $B \in a$, то $A \cup B \in a$,
3. Если A, $B \in a$, то $A \setminus B \in a$.

Бесконечное множество

Множество, содержащее неограниченное число элементов

Дополнение

Дополнение (отрицание) (читается "не A") есть множество U\A.

<u>Смотрите также:</u>

Отрицание

Конечное множестро

Множество, содержащее конечное число элементов

Множеством-степень

Множество всех подмножеств заданного множества

Мощность множества

Число элементов в конечном множестве

Нестрогое включение

Несобственное подмножество множества, возможно совпадающее с ним.

Объединение множеств

Множество, которое содержит все элементы, входящие либо в первое, либо во второе, либо в оба одновременно.

Смотрите также:

Сумма множеств

Пересечение множеств

Множество, содержащее только элементы, входящие в оба множества одновременно.

Смотрите также:

Произведение множеств

Подмножество

Множество А, все элементы которого принадлежат множеству В, называется подмножеством множества В.

Равенство множеств

Неупорядоченные множества равны, если они содержат одинаковый набор элементов.

Разность множеств

Разность А\В есть множество, содержащее все элементы А, не входящие в В.

Строгое включение

Содмножество множества, не совпадающее с ним.

Универсальное множество

Множество, которое содержит все возможные элементы, встречающиеся в данной задаче.

Упорядоченное множество

Множество, в котором важны не только его элементы, но и порядок их следования во множестве.

Элементы множества

это объекты, которые образуют данное множество, и могут обладать некоторыми свойствами и находиться в некоторых отношениях между собой или с элементами других множеств

Перечень ссылок

Источники, использованные в материалах

Компьютерная дискретная математика. Белоус Н.В., Бондаренко М.Ф., Руткас А.Г. / Харьков. "Компания СМИТ". 2004. -480с.