Министерство образования и науки Украины
Харьковский национальный университет
радиоэлектроники

Зуєв М.Г., Сова Г.В., Титаренко О.М.

ВМ

Лекція 1 Основні поняття. Диференційовність фунукціїі двох змінних

для всіх напрямів

Харків
2010

Зміст

Теорія

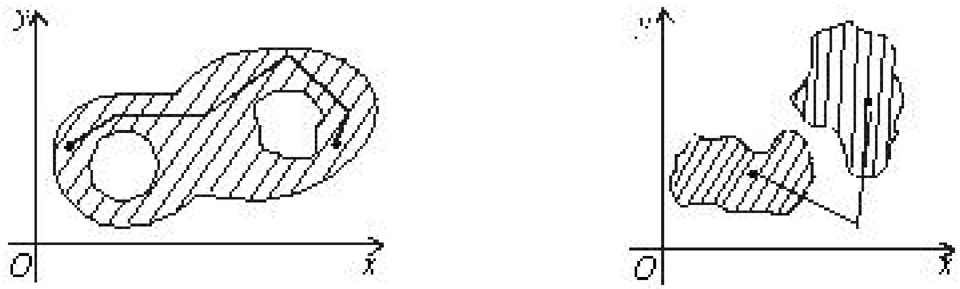
Множини точок на площині та в n-вимірному просторі

Упорядкована пара чисел $(x_0; y_0)$ - це множина з двох чисел x_0 та y_0 , якщо зазначено, яке з цих чисел вважається першим, а яке-другим.

Упорядкованій парі чисел $(x_0; y_0)$ на координатній площині відповідає одна точка $P_0(x_0; y_0)$. Аналогічно, в *n*-вимірному просторі *n* упорядкованим дійсним числам відповідає одна точка $P_0(x_1^0;\ x_2^0;\ \ldots;\ x_n^0)$, де числа $x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots\ ,\ x_n^0$ будуть координатами цієї точки.З метою скорочення запису далі розглядатимемо здебільшого множини точок на площині, але подані далі означення можна вважати правильними і в разі *n*-вимірного простору.

Означення. Множина точок називається *звязною*, якщо будь-які її дві точки можна сполучити ламаною лінією так, щоб усі точки цієї лінії належали цій множині.

Приклад 1. На рис. 1.1 у випадку а) буде звязна множина, а у випадку б) - не звязна.

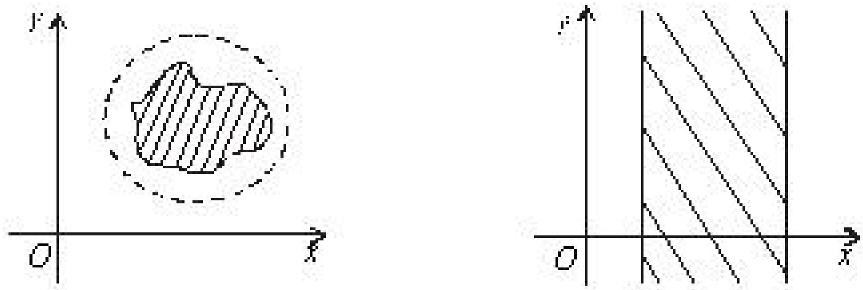


а) *б*)

Рис. 1.1

Означення. Множина точок називається *обмеженою*, якщо всі її точки належать множині точок круга скінченного радіуса.

Приклад 2. На рис. 1.2 у випадку а) маємо обмежену множину, а у випадку б) - необмежену.



а) *б*)

Рис. 1.2

Означення. Множина точок, координати яких задовольняють нерівність

$$\left(x_1 - x_1^0\right)^2 + \left(x_2 - x_2^0\right)^2 + \ldots + \left(x_n - x_n^0\right)^2 < \delta^2 \tag{1.1}$$

називається d-*околом точки* $P_0\left(x_1^0;\ x_2^0;\ \ldots\ ;x_n^0\right)$.

Зауваження. У випадку двовимірного простору нерівність (1) можна подати у вигляді

$$\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 < \delta^2. \tag{1.2}$$

Вона означає внутрішність круга з радіусом $R = \varepsilon$ та з центром у точці $P_0\left(x_0;\ y_0\right)$ (рис. 1.3).

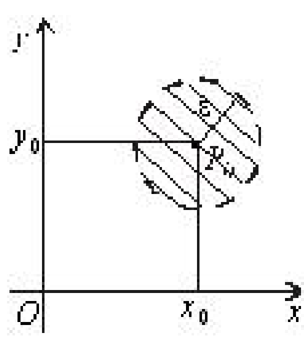


Рис. 1.3

P_0 вилучимо саму точку P_0, дістанемо *виколотий* d-*окіл* точки P_0.

Означення. Точка називається *внутрішньою* для множини точок, якщо вона належить цій множині разом з деяким своїм δ-околом, і *зовнішньою*, якщо існує її окіл з точок, жодна з яких не належить цій множині.

Означення. Звязна множина, яка складається тільки з внутрішніх точок, називається *відкритою областю* (або просто *областю*).

Наприклад, коли *D* - прямокутник, область позначатимемо

$$D=\{(x;\ y)\in R^2 \mid \quad a\le x\le b,\ c\le y\le d\}.$$

Приклад 3. На рис. 1.4 множина точок *D* - область:

$$D=\{(x;\ y)\in R^2 \,|1<x<3,\ 1<y<2\}.$$

Означення. Точка називається *межовою* для області, якщо в будь-якому її δ-околі існують точки, що не належать області і належать їй.

Означення. Множина межових точок називається *межею області*.

Означення. Область, обєднана зі своєю межею, називається *замкненою областю*.

Приклад 4. На рис. 1.5 $D=\{(x,y)\in R^2 \,|x^2+y^2\le 9\}$ - замкнена область, $x^2+y^2=9$ - рівняння межі області, *К* - внутрішня, *L* - зовнішня, *M* - межова точка.

Означення. Множина називається *опуклою*, якщо будь-які точки множини можна звязати відрізком, який буде належати цій множині.

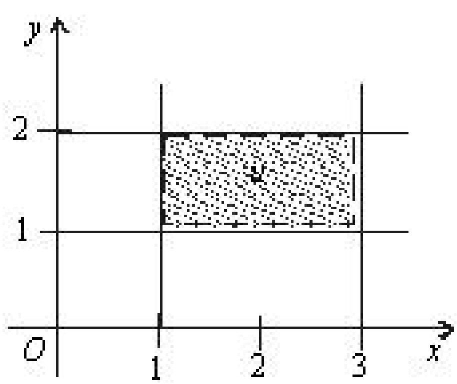


Рис. 1.4

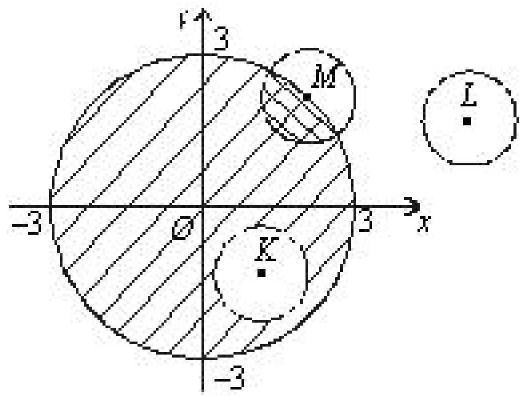


Рис. 1.5

Означення. Область D називається *однозв'язною*, якщо будь-який контур, який лежить всередині області D, можна стягнути в точку, не виходячи за межі області D.

Означення функції кількох(багатьох) змінних

Означення. Якщо кожній точці $P(x_1; x_2; \ \dots \ ; x_n)$ множини *D* *n*-вимірного простору поставлено у відповідність за деяким законом одне і тільки одне дійсне число $z \in E \subset R$, то кажуть, що в області $D \subset R^n$ задано функцію *n* незалежних змінних $z = f(x_1; \ x_2; \ \dots ; x_n)$. При цьому *D* називають *областю визначення функції*, *E* - *областю значень функції*.

Згідно з означенням функцію $z = f(x_1; x_2; \ \dots \ ; x_n)$ можна розглядати як функцію точки і записувати $z = f(P)$.

Зокрема, при *n* = 2 говорять, що задана функція двох змінних $z = f(x; y)$, якщо кожній парі $(x; y) \in D$ на площині поставлено у відповідність тільки одне число *z*. Для прикладних питань радіоелектроніки має значення розгляд функції двох або трьох незалежних змінних. Тому в подальшому більше уваги звертатимемо на ці функції.

Наведемо приклади функції двох змінних.

Приклад 5. Потужність *W* електричного струму на ділянці ланцюга залежить від різниці потенціалів *U* на кінцях ділянки і сили струму *I;* ця залежність дається формулою $W = UI$.

Приклад 6. Робота А електричного струму *I* на ділянці ланцюга з різницею потенціалів *U* за час t дається формулою $A = UIt$.

Способи задання функції

Як і функцію однієї змінної, функції двох змінних можна зобразити:

- *аналітично* (у вигляді формули), наприклад:

$$z = x^2\left(x^3 + 5y\right),$$

- *таблично* (у вигляді таблиці), наприклад:

таблицею задана функція $z = x - y^2$;

	y *x*	1	2	3	4
	1	0	-3	-8	-15
	2	1	-2	-7	-14
	3	2	-1	-6	-13
	4	3	0	-5	-12

- *графічно.*

Для графічного зображення функції двох змінних використовуємо систему координат *Oxyz* у тривимірному просторі (рис. 1.6).

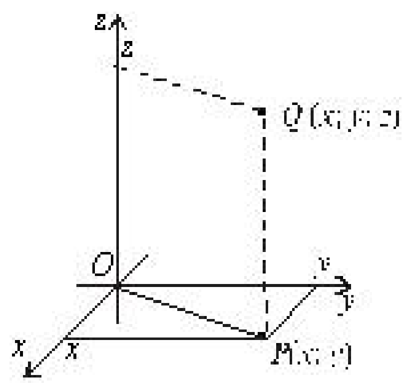
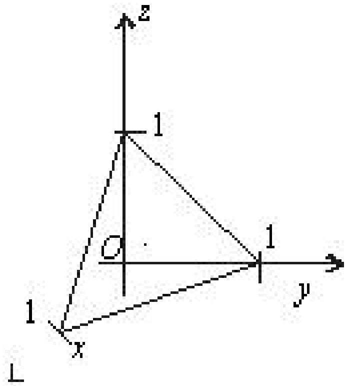


Рис. 1.6

Кожній парі чисел *x* та *y* відповідає точка $P(x;y)$ площини *Oxy*. У точці $P(x;y)$ проводимо пряму, перпендикулярну до площини *Oxy*, та позначаємо на ній відповідне значення функції *z*; дістаємо в просторі точку *Q* з координатами $(x;y;z)$, яка позначається символом $Q(x;y;z)$. Точки *Q*, які відповідають різним значенням незалежних змінних, утворюють певну поверхню у просторі. Така поверхня є *графічним зображенням функції* $z = f(x;y)$.

Зауваження. На практиці побудувати графік функції важко, адже йдеться про зображення на площині просторової фігури, а це не завжди вдається.

Приклад 7.Графічне зображення функції $z = 1 - x - y$ є площина, яка проходить через точки (0;0;1), (0; 1; 0), (1; 0; 0) (рис. 1.7).



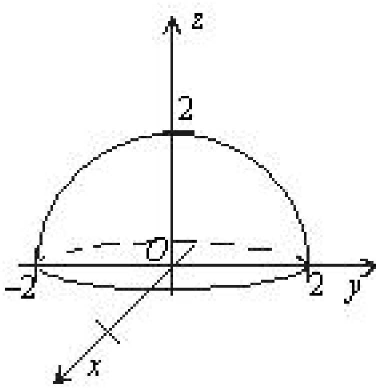


Рис. 1.7 Рис. 1.8.

Графічне зображення функції $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ є півкуля (рис. 1.8).

Знаходження області визначення функції двох змінних

Покажемо алгоритм знаходження області визначення функції двох змінних на прикладі.

Приклад 8. Знайти область визначення функції $z = \ln\left(4 - x^2 - y^2\right) \Big/ \sqrt{4x - y}$ та надати їй геометричну інтерпретацію.

1.Знайдемо область визначення функції аналітично

$$D = \left\{ \left(x; y\right) \in R^2 \middle| 4 - x^2 - y^2 > 0, \quad 4x > y \right\}.$$

2.Нерівності в *D* замінюємо рівностями і будуємо лінії, що їм відповідають на координатній площині, а саме: $x^2 + y^2 = 4$; $y = 4x$.

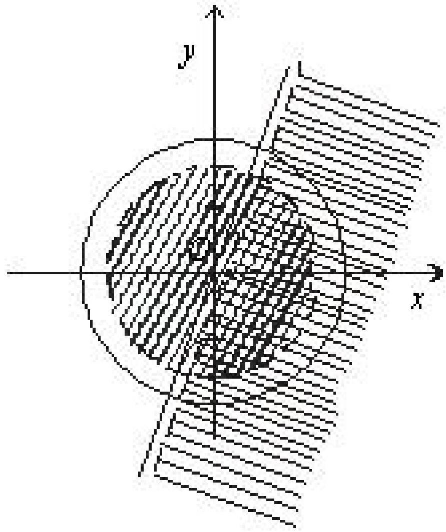


Рис. 1.9

3.Визначаємо за допомогою контрольних точок $P_1\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$, $P_2(1;\ 2)$ розміщення *D* на площині і заштриховуємо її (рис. 9).

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=\frac{10}{4}<4\\ 4\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{2}>0\end{aligned}\right\}\Rightarrow P_1\in D$$

$$\left.\begin{aligned}1^2+2^2=5>4\\ 4>2\end{aligned}\right\}\Rightarrow P_2\notin D.$$

Границя функції двох змінних

Означення. Число А називається *границею функції* $z=f(x;y)$ при $x\to x_0$, $y\to y_0$, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ існує число $\delta>0$ таке, що при виконанні нерівності $0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$ виконується нерівність $|f(x;y)-A|<\varepsilon$ і позначається $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x;y)=A$ або $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)=A$.

Зауваження. Для функції багатьох змінних справедливі теореми про границю суми, добутку та частки, які аналогічні відповідним теоремам для функції однієї незалежної змінної.

Наведемо формулювання відповідних теорем.

Теорема 1. **Якщо функція** $z = f(x;\ y)$ **має границю при** $(x;\ y) \to (x_0;\ y_0)$**, то вона єдина.**

Теорема 2. **Якщо функція** $z = f(x;\ y)$ **має границю при** $(x;\ y) \to (x_0;\ y_0)$ **, то вона обмежена в деякому околі точки** $(x_0;\ y_0)$**.**

Теорема 3. **Якщо** $\lim\limits_{(x;\ y)\to(x_0;\ y_0)} f(x;\ y) = b$ **,** $\lim\limits_{(x;\ y)\to(x_0;\ y_0)} g(x;\ y) = c$ **і в деякому околі точки** $(x_0;\ y_0)$ **виконується нерівність** $f(x;\ y) \le g(x;\ y)$**, то** $b \le c$ **.**

Теорема 4. **Нехай** $\lim\limits_{(x;\ y)\to(x_0;\ y_0)} f(x;\ y) = b$**,** $\lim\limits_{(x;\ y)\to(x_0;\ y_0)} g(x;\ y) = c$**. Тоді:**

1) $\lim\limits_{(x;\ y)\to(x_0;\ y_0)} \left(f(x;\ y) + g(x;\ y)\right) = b + c$**;**

2) $\lim\limits_{(x;\ y)\to(x_0;\ y_0)} f(x;\ y)\cdot g(x;\ y) = b \cdot c$**;**

3) $\lim\limits_{(x;\ y)\to(x_0;\ y_0)} \dfrac{f(x;\ y)}{g(x;\ y)} = \dfrac{b}{c} \quad (c \ne 0)$.

Приклад 9. Обчислити $\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} \dfrac{x^2 + y^3}{2x - 3y}$.

Згідно з теоремами про арифметичні операції з границями, а також те, що границя сталої дорівню сталій, тобто $\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} x = 1$, $\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} y = 2$, маємо

$$\lim_{(x;y)\to(1;2)} \frac{x^2 + y^3}{2x - 3y} = \frac{\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} \left(x^2 + y^3\right)}{\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} (2x - 3y)} == \frac{\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} x^2 + \lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} y^3}{\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} 2x - \lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} 3\cdot y} = \frac{1 + 2^3}{2 - 3\cdot 2} = -\frac{9}{4}.$$

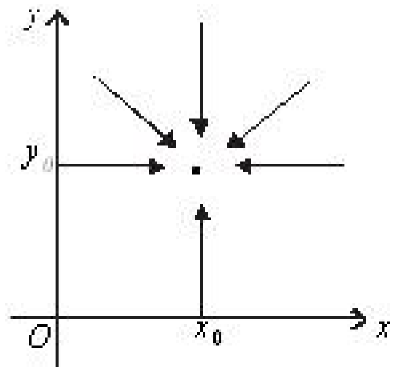
Приклад 10. Обчислити $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(1 + 2xy)}{\sin 3xy}$.

Візьмемо $xy = t$. Тоді з того, що $(x; y) \to (0;\ 0)$ випливає $t \to 0$ і задану границю можна переписати у вигляді $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(1+2t)}{\sin 3t}$. При $t \to 0$ маємо $\ln(1 + 2t) \sim 2t$; $\sin 3t \sim 3t$, тобто $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(1+2t)}{\sin 3t} == \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{2t}{3t} = \dfrac{2}{3}$. Таким чином, $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{(1 + 2xy)}{\sin 3xy} = \dfrac{2}{3}$.

Зауваження. Між поняттями границі в точці для функції однієї змінної та функції багатьох змінних є багато спільного, але є й принципова відмінність, яка робить поняття границі функції кількох змінних суттєво більш обмеженим, ніж поняття границі функції однієї змінної.

Річ у тім, що коли $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ ($f(x)$ - функція однієї змінної), то це означає, що і лівостороння і правостороння границі дорівнюють *b*. Правильним є й обернене: з існування та збігу двох односторонніх границь випливає існування границі функції в точці.

Для функції двох змінних $z=f(x;y)$ наближатися до точки $(x_0;\ y_0)$ можна нескінченною множиною способів: і справа, і зліва, і зверху, і знизу, і під кутом 30° до осі *Ox* тощо (рис. 1.10).



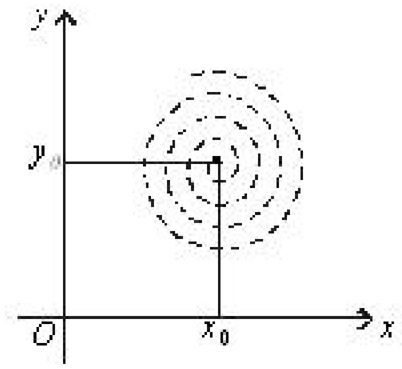


Рис. 1.10 Рис. 1.11

Більше того, до точки можна наближатися не тільки по прямій, а й по більш складних траєкторіях (рис. 1.11).

Очевидно, що рівність $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x;y)=b$ правильна тоді й тільки тоді, коли границя дорівнює *b* при наближенні до точки $(x_0;y_0)$ по будь-якій траєкторії. Це суттєво більш обмежене, ніж збіг двох односторонніх границь у випадку функції однієї змінної.

Приклад 11. Довести, що $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ не існує.

Будемо наближатися до точки (0; 0) по прямій $y=kx$. Якщо $y=kx$, тоді $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{xkx}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$.

Зауважимо, що значення границі залежить від кутового коефіцієнта прямої, наприклад:

при $k=1$ границя дорівнює $1/2$.

при $k=2$ границя дорівнює $2/5$ і т. п.

Таким чином, якщо наближатися до точки (0;0) з різ них напрямків, то дістанемо різні значення, тобто границя $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ не існує.

Зауваження. Нехай дано функцію двох змінних $z = f(x;\ y)$. Розглянемо границі, які дістаємо після послідовних граничних переходів за кожним із аргументів окремо в тому чи іншому порядку.

Якщо при будь-якому фіксованому *y* з *Y* існує для функції *f*(*x*; *y*) (яка буде функцією від *x*) границя при *x* → *a*, то ця границя, взагалі кажучи, буде залежати від наперед фіксованого *y*:

$$\lim_{x\to a} f(x;\ y) = \varphi(y).$$

Далі постає запитання про границю функції $\varphi(y)$ при $y \to b: \lim\limits_{y\to b}\varphi(y) = \lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x;\ y)$ - це буде одна із двох повторних границь. Іншу дістанемо, якщо границі візьмемо в зворотному порядку

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,\ y).$$

Повторні границі не обовязково рівні.

Приклад 12. Нехай

1) $f(x;\ y) = \frac{x - y + x^2 + y^2}{x+y}$ і *a* = *b* = 0, тоді:

$$\varphi(y) = \lim_{x\to 0} f(x;\ y) = y - 1,\ \lim_{y\to 0}\varphi(y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x;\ y) = -1,$$

але водночас $\varphi(x) = \lim\limits_{y\to 0} f(x;\ y) = x + 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x;\ y) = 1$. Отже, $1 \neq -1$.

Може статися так, що одна з повторних границь існує, друга-ні.

Розглянемо приклади.

2) $f(x;\ y) = \frac{x\sin\frac{1}{x} + y}{x+y}$ або

3) $f(x;\ y) = x\cdot\sin\frac{1}{y}$.

В обох випадках існує повторна границя $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f$, але немає повторної границі $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f$ (в останньому прикладі навіть не існує простої границі $\lim\limits_{y\to 0} f$).

Приклади показують, що можливість перестановки границь повинна бути обґрунтована. У звязку з цим виконується наступна теорема, що встановлює звязок між подвійною і повторною границями.

Теорема 5. **Якщо 1) існує (скінченна або ні) подвійна границя**

$$A=\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f\left(x;\ y\right)$$

і 2) при будь-якому *y* з *Y* існує (скінченна) звичайна границя по *x* $\varphi\left(y\right)=\lim\limits_{x\to a} f\left(x;\ y\right)$**,**
то існує повторна границя $\lim\limits_{y\to b}\varphi\left(y\right)=\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f\left(x;\ y\right)$**, яка дорівнює подвійній границі.**

Доведемо це для випадку скінченних *A*, *a* і *b*. Згідно з означенням за заданим $\varepsilon>0$ знайдеться таке $\delta>0$, що $\left|f\left(x;\ y\right)-A\right|<\varepsilon$, якщо тільки $\left|x-a\right|<\delta$ і $\left|y-b\right|<\delta$ (причому *x* береться з *X*, а *y* з *Y*). Зафіксуємо *y* так, щоб виконувалась нерівність $\left|y-b\right|<\delta$ і перейдемо в $\left|f\left(x;\ y\right)-A\right|<\varepsilon$ до границі при $x\to a$.

За умовою 2) $f\left(x;\ y\right)$ прямує до $\varphi\left(y\right)$, тому

$$\left|\varphi\left(y\right)-A\right|\le\varepsilon\cdot$$

При фіксованому *y* з *Y*, що задовольняє умову $\left|y-b\right|<\delta$, маємо $A=\lim\limits_{y\to b}\varphi\left(y\right)=\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f\left(x;\ y\right)$, що й треба було довести.

Якщо поряд з умовами 1) і 2) при будь-якому *x* з *X* існує (скінченна) звичайна границя по *y* $\psi\left(x\right)=\lim\limits_{y\to b} f\left(x;\ y\right)$, то, як випливає з доведеного, існує також і друга повторна границя $\lim\limits_{x\to a}\psi\left(x\right)=\lim\limits_{x\to a} f\left(x;\ y\right)$, що дорівнює також числу *A* (в цьому випадку обидві повторні границі однакові).

З теореми 5.5 випливає, що в прикладах 1) і 2) подвійна границя не існує.

У прикладі 3, навпаки, подвійна границя існує: З нерівності $\left|x\cdot\sin\frac{1}{y}\right|\le\left|x\right|$ випливає, що вона дорівнює нулю.

Не обовязково існування подвійної границі необхідне для рівності повторних.

У прикладі $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$ обидві повторні границі існують і рівні 0, але подвійної границі немає.

Неперервність функції двох змінних

Означення. Функція $z = f(x;y)$ називається *неперервною* в точці $P_0(x_0;y_0)$, якщо $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) = f(x_0;y_0)$.

Означення. Функція $z = f(x;y)$ називається *неперервною* в області (замкненій чи відкритій), якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Приклад 13. Розглянемо функцію двох незалежних змінних

$$f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x^2+y^2>0) \\ 0, & (x^2+y^2=0) \end{cases}$$

Ця функція має розрив у точці (0; 0), бо в точці для функції $f(x;y)$ границі не існує.

Тут ми спостерігаємо цікаве явище. Функція, що розглядається, не є неперервною в точці (0; 0) по двох змінних водночас, але є неперервною по змінних *x* та *y* окремо.

Приклад 14. Точки розриву можуть бути не тільки ізольованими, як у попередньому прикладі, а й заповнювати лінії, поверхні і т.п. Так, функції двох змінних $f(x;y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$, $f(x;y) = \dfrac{1}{x^2+y^2-1}$ мають розриви: перша - прямі $y = \pm x$, друга - окіл $x^2+y^2=1$.

Для функції трьох змінних $f(x;\ y;\ z) = \dfrac{x+y+z}{xy-z}$, $f(x;\ y;\ z) = \dfrac{1}{x^2+y^2-z^2}$ розриви заповнюють у першому випадку гіперболічний параболоїд $z = xy$, а в другому - конус $z^2 = x^2+y^2$.

Означення. Нехай функція $z = f(x;y)$ визначена на множині *E*, а змінні *x* і *y*, у свою чергу, залежать від змінних *u* та *v* і $x = x(u;v)$, $y = y(u;v)$, де обидві функції $x(u;v)$ та $y(u;v)$ визначені на множині *D*. Якщо для будь-якого $(u;v)\in D$ значення $x(u;v)$, $y(u;v)$ такі, що $(x;y)\in E$ (рис. 1.12), то кажуть, що на множині *D* визначена *складна функція* $z = f(x;y)$, де $x = x(u;v)$, $y = y(u;v)$; *x*, *y* - проміжні змінні, *u*, *v* - незалежні змінні.

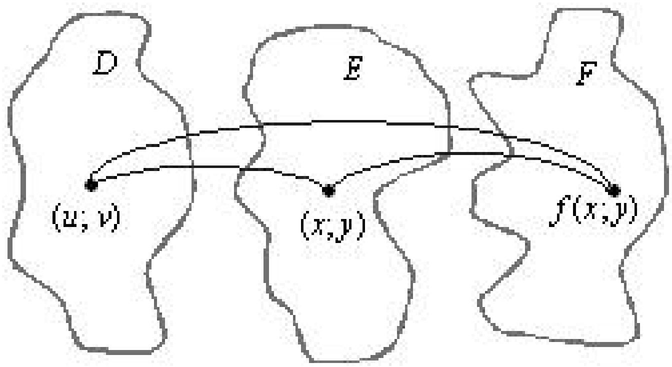


Рис. 1.12.

Приклад 15. Функція $z = x^3 + y^3$, де $x = \sin(u+v)$, $y = \cos(u-v)$ - складна функція. Вона визначена на координатній площині. Її можна записати у вигляді $z = \sin^3(u+v) + \cos^3(u-v)$.

Означення. Функцію $z = f(x;\ y)$, яка визначена на множині $D \in R^2$, називають *неперервною по множині* $x \in D$ в точці $(x_0;\ y_0) \in D$, якщо $\lim\limits_{\substack{(x;\ y)\to(x_0;\ y_0)\\ (x;\ y)\in D}} f(x;\ y) = f(x_0;\ y_0)$.

Теорема 6. **Нехай на множині *D* визначено складну функцію $z = f(x;y)$, де $x = x(u;v)$, $y = y(u;v)$, і нехай функції $x = x(u;v)$, $y = y(u;v)$ неперервні в точці $(u_0;v_0)$, а функція $f(x;y)$ неперервна в точці $(x_0;y_0)$, де $x_0 = x(u_0;v_0)$, $y_0 = y(u_0;v_0)$. Тоді складна функція $z = f(x(u;v);\ y(u;v))$ неперервна в точці $(u_0;v_0)$.**

Властивості неперервної функції двох змінних

Теорема 7. **Якщо функція неперервна в точці, то вона обмежена деяким околом цієї точки.**

Теорема 8. **Якщо функції $f(x;y)$ та $g(x;y)$ неперервні в точці $(x_0;y_0)$, то в цій точці будуть неперервними $f(x;y) \pm g(x;y)$, $f(x;y)/g(x;y)$ при $g(x_0;y_0) \neq 0$.**

Теорема 9. **Якщо функція $f(x;y)$ неперервна на замкненій обмеженій множині, то вона обмежена на цій множині.**

Теорема 10. **Якщо функція $f(x;y)$ неперервна на замкненій обмеженій множині, то серед її значень на цій множині є як найменші, так і найбільші.**

Теорема 11 **(про нуль неперервної функції). Нехай функція $f(x;y)$ неперервна на звязній множині *D* і набуває у двох точках *A* і *B* цієї множини значень різних знаків. Тоді у множині *D* знайдеться така точка, що в ній функція перетворюється на нуль.**

Теорема 12 **(про проміжне значення). Нехай функція $f(x;y)$ неперервна на звязаній множині *D* й у двох будь-яких точках *A* та *B* цієї множини набуває нерівних значень $f(A)$ та $f(B)$. Тоді на цій множині вона набуває будь-яких значень μ, яке лежить між $f(A)$ і $f(B)$, тобто існує така точка $c \in D$, що $f(c) = \mu$.**

Частинні та повний прирости функції двох змінних

Нехай функція $z = f(x;y)$ визначена в деякому околі точки $P_0(x_0;y_0)$. Надамо незалежним змінним *x* та *y* приросту відповідно Δx та Δy так, щоб точка $P(x_0+\Delta x;\ y_0+\Delta y)$ не виходила за межі вказаного околу. Тоді й точки $K(x_0+\Delta x;y_0)$, $M(x_0;y_0+\Delta y)$ також належатимуть розглядуваному околу (рис. 1.13).

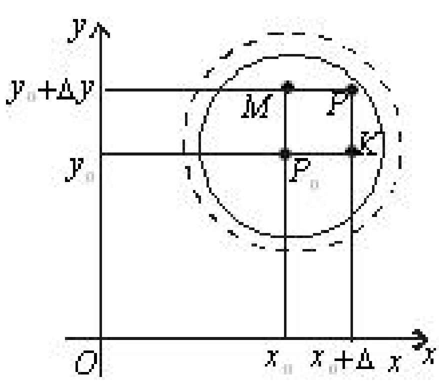


Рис. 1.13

Означення. Різницю $f(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y) - f(x_0;y_0)$ *називають повним приростом* функції $z = f(x;y)$ при переході від точки $(x_0;y_0)$ до точки $(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)$ і позначають Δz. Різницю $f(x_0+\Delta x;y_0) - f(x_0;y_0)$ називають *частинним приростом за x*, а різницю $f(x_0;y_0+\Delta y) - f(x_0;y_0)$ - *частинним приростом за y* функції $z = f(x;y)$; їх позначають відповідно $\Delta_x z$ і $\Delta_y z$. Таким чином,

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y) - f(x_0;y_0),$$

$$\Delta_x z = f\left(x_0 + \Delta x; y_0\right) - f\left(x_0; y_0\right), \Delta_y z = f\left(x_0; y_0 + \Delta y\right) - f\left(x_0; y_0\right).$$

Зауваження. Аналогічно визначаються прирости функції більш ніж двох змінних.

Диференційовність функції двох змінних

Означення. Функція $z = f\left(x; y\right)$ називається *диференційовною* у точці $\left(x_0; y_0\right)$, якщо її повний приріст Δz можна подати у вигляді:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

де *A*, *B* - числа, α, β - нескінченно малі при $\Delta x \to 0, \quad \Delta y \to 0$.

Головна лінійна частина приросту функції, тобто $A\Delta x + B\Delta y$, називається *повним диференціалом функції* (точніше першим диференціалом) двох змінних $f\left(x;\ y\right)$ у точці $\left(x_0,\ y_0\right)$ і позначається dz:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

***Теорема 13*. Якщо функція $z = f\left(x; y\right)$ диференційовна в точці $\left(x_0; y_0\right)$, тоді існують границі $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ та $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ і вони дорівнюють відповідно *A* і *B*.**

Означення. Нехай функція $z = f\left(x;\ y\right)$ визначена в точці $\left(x_0;\ y_0\right)$ і в її деякому околі. Якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \left(\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta x} \right)$, то вона називається *частинною похідною за x* (*за y*) функції $z = f\left(x; y\right)$ у точці $\left(x_0; y_0\right)$ і позначається $\frac{\partial z}{\partial x}$, або z'_x, або $f_x\left(x_0; y_0\right)$. Таким чином, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = Z'_x$, $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = Z'_y$. Із означення частинних похідних матимемо, що вони шукаються за тими правилами, що й похідні функції однієї змінної. Треба лише памятати, що при знаходженні z'_x *y* вважається **сталою**, а при знаходженні z'_y змінна *x* вважається **сталою**.

Тепер можна сформулювати **теорему 13** інакше:

***Теорема 14* (необхідна умова диференційовності функції $z = f\left(x;\ y\right)$ у точці).**

Якщо функція $z = f\left(x;\ y\right)$ диференційовна в точці $\left(x_0;\ y_0\right)$, то в цій точці існують частинні похідні z'_x і z'_y.

Приклад 16. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функції $z = x^3 y + \sin\left(x^2 + \sqrt{y}\right) + \operatorname{tg} x + \ln y$.

Знайдемо $\frac{\partial z}{\partial x}$. Вважаючи, що $y = \text{const}$, дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y + \cos\left(x^2 + \sqrt{y}\right) \cdot 2x + \frac{1}{\cos^2 x}.$$

При знаходженні $\frac{\partial z}{\partial y}$ вважаємо, що $x = \text{const}$. Дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + \cos\left(x^2 + \sqrt{y}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{y}.$$

Приклад 17. Знайти z'_x і z'_y для функції $z = x^2 y + xy^2$.

Знайдемо, вважаючи $y = \text{const}$:

$$z'_x = 2xy + y^2.$$

Знайдемо z'_y, вважаючи $x = \text{const}$:

$$z'_y = x^2 + 2xy.$$

Приклад 18. Для функції $f(x;\ y) = \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-(x-a)^2/4y}$ знайти f'_x і f'_y:

$$f'_x = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{-(x-a)}{2y} e^{-(x-a)^2/4y}, \quad f'_y = \left(-\frac{1}{2y^{3/2}} + \frac{(x-a)^2}{4y^{5/2}}\right) e^{-(x-a)^2/4y}.$$

Диференціали незалежних змінних збігаються з їхніми приростами: $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Тоді, як випливає із означення повного диференціала і теореми 13, повний диференціал функції $z = f(x; y)$ можна обчислити за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Аналогічно повний диференціал функції трьох аргументів $u = f(x; y; z)$ обчислюється за формулою

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Приклад 19. Знайти du, якщо $u = x^{y^2 z}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z\, x^{y^2 z - 1},\ \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z} \ln x\, 2yz,\ \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z} \ln x\, y^2.$$

Отже, $du = y^2 z x^{y^2 z - 1} dx + 2yz x^{y^2 z} \ln x dy + y^2 x^{y^2 z} \ln x dz$.

Приклад 20. Знайти dz, якщо $z = \ln(x + \ln y)$.

$$dz = z'_x dx + z'_y dy,$$

де

$$z'_x = \frac{1}{x + \ln y};$$

$$z'_y = \frac{1}{x + \ln y} \cdot \frac{1}{y},$$

отже,

$$dz = \frac{1}{x + \ln y}\left(dx + \frac{1}{y} dy\right).$$

Геометричний зміст частинних похідних. Якщо функцію $z = f(x; y)$, що має частинні похідні в точці $(x_0;\ y_0)$, розглядати за умови $y = y_0$, то геометрично це означає, що поверхня $z = f(x; y)$ перетинається площиною $y = y_0$, паралельно координатній площині Oxz; у перерізі дістаємо лінію. Тоді $f'_x(x_0; y_0)$ є кутовим коефіцієнтом дотичної до зазначеного перерізу в точці $(x_0;\ y_0)$, тобто тангенсом кута нахилу цієї дотичної до додатного напряму осі Ох. Аналогічно, $f'_y(x_0;\ y_0)$ є кутовим коефіцієнтом дотичної, що проходить через точку $(x_0;\ y_0)$, до кривої, яка утворюється в результаті перетину поверхні $z = f(x;\ y)$ з площиною $x = x_0$.

Достатня умова диференційовності функції двох змінних у точці

Для функції однієї змінної твердження щодо її диференційовності та існування похідної є рівносильними. У випадку функції двох змінних ми маємо інше: існування частинних похідних - необхідна умова диференційовності функції в точці, але не є достатньою умовою диференційованості. Наприклад, для функції

$$z = f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x;y) \neq (0;\ 0) \\ 0, & (x;y) = (0;\ 0) \end{cases}$$

у точці (0; 0): $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$. Але ця функція розривна в точці (0; 0), а тому функція не може бути диференційовною в цій точці. Таким чином, для диференційовності функції $z = f(x;y)$ у точці $(x_0;y_0)$ недостатньо недостатньо тільки існування частинних похідних: потрібно додатково вимагати неперервності частинних похідних, що випливає з поданої далі теореми.

***Теорема 15*. Якщо функція $z = f(x;y)$ у деякому околі точки $(x_0;\ y_0)$ має неперервні частинні похідні, тоді вона диференційовна в точці $(x_0;\ y_0)$.**

Зауваження. Можна навести твердження про звязок між поняттями неперервності і диференційовності функції двох змінних у точці, аналогічні до тих, що виконуються для функції однієї змінної.

***Теорема 16.* Якщо функція $z = f(x;y)$ диференційовна в точці $(x_0;\ y_0)$, то вона неперервна в цій точці. Обернен**е твердження неправильне.

Практика

Навчальні завдання (приклади з розвязками)

1. Знайти область визначення функції двох змінних та надати їй геометричну інтерпретацію: а) $z=\dfrac{2x+y}{x-y}$; б) $z=\sqrt[4]{1-x^2-y^2}$; в) $z=\ln\left(x^2+y^2-4\right)$; г) $z=\sqrt{\sin\pi\left(x^2+y^2\right)}$.

а)Функція невизначена, якщо $x=y$. Геометрично це означає, що область визначення складається із двох напівплощин, одна з яких лежить вище, а друга - нижче від прямої $y=x$ (рис. 1.14).

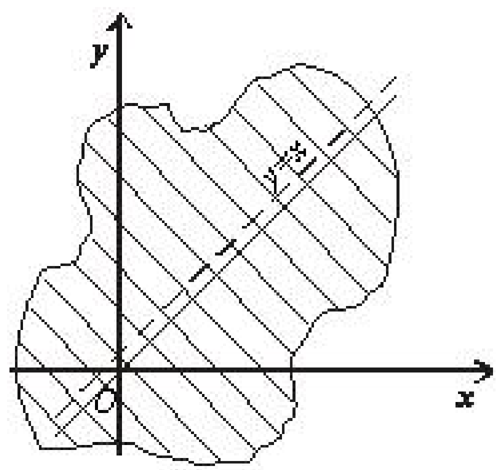


Рис. 1.14

б)Функція визначена, якщо $1-\left(x^2+y^2\right)\geq 0$, тобто $x^2+y^2\leq 1$. Це є коло з центром (0; 0) та радіусом 1 (рис. 1.15).

в)Функція визначена, якщо $x^2+y^2-4>0$, тобто $x^2+y^2>4$ (рис.1.16).

г)Функція визначена, якщо $\sin\pi\left(x^2+y^2\right)\geq 0$, тобто $2n\leq x^2+y^2\leq\leq 2n+1\left(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\right)$ (рис. 1.17).

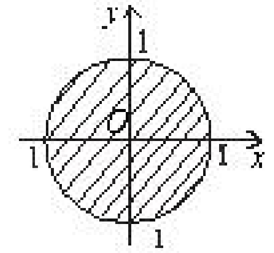
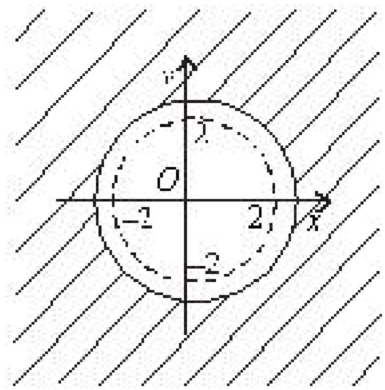
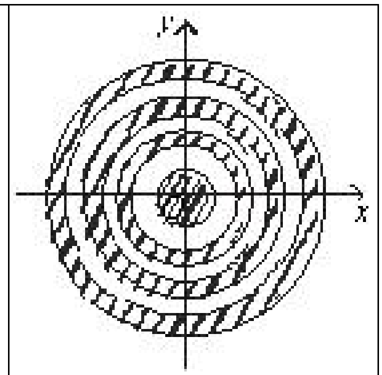
		

Рис. 1.15	Рис. 1.16	Рис. 1.17

2. Знайти границю функції $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$.

Для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ (наприклад, $\delta = \varepsilon$) таке, що для всіх точок $(x;y)$, що задовольняють умову $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$ і відрізняються від початку координат, виконується нерівність

$$\left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2} - 0\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2}|y| \le |y| \le \sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon .$$

Отже, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$.

3. Знайти значення а, при якому функція:

$$u = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}, & \text{якщо } x^2+y^2 \ne 0 \\ a, & \text{якщо } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

в точці (0, 0) є:

1)неперервною за прямою $x = \alpha t, \quad y = \beta t, \quad \alpha^2+\beta^2 \ne 0$;

2)неперервною за кривою $y = \alpha x^2$;

3)неперервною.

1)Будемо наближатися до точки (0; 0) по прямій $x = \alpha t$, $y = \beta t$, $\alpha^2+\beta^2 \ne 0$, тобто

Якщо *a* = 0, тоді задана функція буде неперервною за заданою прямою.

2)Будемо наближатися до точки (0; 0) по кривій $y = \alpha x^2$, тобто

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \alpha x^2}{x^4 + \alpha^2 x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha x^4}{x^4\left(\alpha^2+1\right)} = \frac{\alpha}{\alpha^4+1}.$$

Якщо $a = \dfrac{\alpha}{\alpha^4+1}$, тоді задана функція буде неперервною за заданою кривою.

3)У точці (0; 0) функція $\dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ має розрив, бо в точці (0; 0) границя функції не існує. Це випливає із 1) і 2).

4. Знайти точки розриву функції двох змінних:

1) $u = \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$;

2) $u = \dfrac{1}{\sin^2 x + \sin^2 y}$.

1. Функція $u = \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$ у точці *x* = 0, *y* = 0 не існує, тому вона має в цій точці розрив. Знайдемо границю $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$.

Для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, що для всіх точок $\left(x;\, y\right)$, що задовольняють умову $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ і відрізняються від початку координат, виконується нерівність:

$$\left|\frac{x^3}{x^2 + y^2} - 0\right| = \frac{x^2}{x^2 + y^2}|x| \le |x| \le \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon.$$

Отже, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2} = 0$ і функція має в точці (0; 0) розрив.

2.Функція $u = \dfrac{1}{\sin^2 x + \sin^2 y}$ не існує, якщо $\sin^2 x + \sin^2 y = 0$, тобто $x = \pi k,\, y = \pi k_1$. Тому може бути, що вона має розрив. Знайдемо границю $\lim\limits_{\substack{x\to \pi k\\ y\to \pi k_1}} \dfrac{1}{\sin^2 x + \sin^2 y} = +\infty$.

Отже, функція $u = \dfrac{1}{\sin^2 x + \sin^2 y}$ має в точці (0; 0) розрив.

5. Знайти повний диференціал функції двох змінних:

$$z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{x-y}.$$

Знайдемо $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x+y}{x-y}\right)'_x=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{-2y}{(x-y)^2}=\frac{-y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x+y}{x-y}\right)'_y=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{2x}{(x-y)^2}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Отже, $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$.

Завдання для перевірки знань

1.Знайти та зобразити область визначення функції двох змінних:

1. а) $z=\ln\left(y^2-4x+8\right)$; б) $z=\arcsin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

2. а) $z=\arcsin\frac{y-1}{x}$; б) $z=\frac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$.

3. а) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$; б) $z=\sqrt{y\sin x}$.

4. а) $y=\ln(xy)$; б) $z=\sqrt{\sin\left(x^2+y^2\right)}$.

5. а) $z=x+\sqrt{x^2-y^2}$; б) $z=\arcsin\left(\frac{x}{y^2}\right)+\arcsin(1-y)$.

6. а) $y=\frac{4}{x+y}$; б) $z=\sqrt{x\sin y}$.

$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$; б) $z=\sqrt{\cos\left(x^2+y^2\right)}$.

8. а) $z=\arcsin\left(\dfrac{y}{x}\right)$; б) $z=ctg\pi\left(x+y\right)$.

9. а) $z=\ln\left(x^2+y\right)$; б) $z=\arcsin\sqrt{x^2+y^2}$.

10. а) $z=x+\arccos y$; б) $z=tg\pi\left(x+y\right)$.

2.Встановити, чи буде множина, на якій визначена функція $u=u\left(x,y,z\right)$

а)замкненою, б)відкритою, в)областю, г)замкненою областю, д)опуклою, якщо:

1) $u=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$; 2) $u=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$;

3) $u=\arccos\left[\dfrac{x^2+y^2}{z^2}\right]$; 4) $u=\left(xy\right)^z$; 5) $u=z^{xy}$.

Відповідь.

1. а) ні, б) так, в) так, г) ні, д) ні;

2. а) так, б) ні, в) ні, г) так, д) так;

3. а) ні, б) ні, в) ні, г) ні, д) ні;

4. а) ні, б) так, в) ні, г) ні, д) ні;

5. а) ні, б) так, в) так, г) ні, д) так.

3.Знайти

а) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}u$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}u$.

Якщо:

1) $u=\dfrac{x^3-y}{x^3+y}$; 3) $u=x+y\sin\left(1/x\right)$;

2) $u=\dfrac{x^2y+xy^2}{x^2-xy+y^2}$; 4) $u=\left(y/x\right)\operatorname{tg}\dfrac{x}{x+y}$.

4.Знайти в точці (0; 0) границю функції $u = f(x;y)$:

1) $u = \dfrac{xy}{1-\sqrt[3]{1+xy}}$; 3) $u = \dfrac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y+9}-3}$;

2) $u = \dfrac{\sin(y-x^2)}{y-x^2}$; 4) $u = (1+xy)^{-\frac{1}{(x^2+y^2)}}$.

5.Знайти область визначення функції двох змінних $u = \arccos\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$

і встановити, чи буде вона неперервною в області визначення.

6.Знайти всі точки розриву функції:

1) $u = \dfrac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5}$; 3) $u = x\sin\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$;

2) $u = \dfrac{1}{\ln\left|1-x^2-4y^2\right|}$; 4) $u = \sin\left(\dfrac{x}{yz}\right)$.

5) $u = \dfrac{1}{\sin \pi x}+\dfrac{1}{\sin \pi y}$; 6) $u = \dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$.

7.Знайти частинні похідні першого порядку.

1) $z = \sqrt{xy}+\sqrt{x-y}$; 2) $z = \sqrt{x^2+y^2-1}$;

3) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; 4) $u = \dfrac{y}{z}+\operatorname{arctg}\dfrac{z}{x}+\operatorname{arctg}\dfrac{x}{z}$;

5) $u = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z$; 6) $z = x\sqrt{y}+\dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$;

7) $z = \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$; 8) $z = \arcsin\dfrac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

9) $z = e^{-\frac{x}{y}}$; 10) $z = xy\ln(x+y)$;

8.Знайти $\Delta f(x;y)$ і $df(x;y)$ для функції $f(x;y) = x^3-y^3$.

9.Знайти повний диференціал функції $f(x;\ y)$ у заданій точці, якщо:

1) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, а задана точка (1; 1); (0; 1);

2) $f(x;y)=\sqrt{xy+\dfrac{x}{y}}$, а задана точка (2; 1);

3) $f(x;y)=\dfrac{\cos(x-2y)}{\cos(x+2y)}$, а задана точка $\left(\dfrac{\pi}{4};\pi\right)$.

10. Знайти повний диференціал даних функцій:

1) $z=x^3y^4-x^4y^4+x^4y^3$; 2) $z=\dfrac{x+y}{x-y}$; 3) $z=\sin(xy)$; 4) $z=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$;

5) $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$; 6) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$. 7) $z=e^{x^2+y^2}$; 8) $z=\arccos\dfrac{y}{\sqrt{x}}$;

9) $z=sh(xy)$; 10) $z=ch\left(\dfrac{xy}{x+y}\right)$.

Контрольні питання

1. Дайте означення упорядкованої пари чисел.

2. Дайте означення звязної множини, обмеженої множини.

3. Що таке δ-окіл точки $P_0(x_0;y_0)$?

4. Дайте означення внутрішньої і зовнішньої точок множини.

5. Дайте означення області.

6. Дайте означення межі області.

7. Дайте означення замкненої області.

8. Дайте означення функції двох змінних $z=f(x;y)$.

9. Дайте означення границі А функції двох змінних $z=f(x;y)$ при $(x;y)\to(x_0;y_0)$.

10. Дайте означення неперервності функції двох змінних $f(x;y)$ у точці$(x_0;y_0)$.

11. Що таке диференційовна у точці $\left(x_0; y_0\right)$ функція $z = f\left(x; y\right)$?

12. Що таке частинна похідна за *x* (*за y*) функції $z = f\left(x; y\right)$ у точці $\left(x_0; y_0\right)$?

13. Що таке повний приріст функції $z = f\left(x; y\right)$ у точці$\left(x_0; y_0\right)$?

14. За якою формулою обчислюється повний диференціал функції $z = f\left(x; y\right)$?

Словник термінів

δ-окіл точки $P_0(x_0; y_0)$

- це множина точок, координати яких задовольняють нерівність $(x-x_0)^2+(y_0-y)^2<\delta^2$.

Внутрішня точка множини

- це така точка, для якої існу єδ-окіл, усі точки якого належать множині.

Границя А функції двох змінних $z=f(x;y)$ **при** $(x;y)\to(x_0;y_0)$

- це число, що задовольняє нерівність $|f(x;y)-A|<\varepsilon$ при будь-якому $\varepsilon>0$, якщо для нього існує таке δ, що $0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$.

Диференційовна функція $z=f(x;y)$

- це функція, повний приріст якої Δz можна подати у вигляді $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y$, де A, B - числа, α, β - нескінченно малі при $\alpha, \beta\to 0$.

Замкнена область

- це множина, до якої приєднані всі її межові точки.

Звязна множина

- це множина точок, будь-які дві з котрих можна сполучити ламаною так, щоб усі точки ламаної належали цій множині.

Зовнішня точка множини

- це така точка, для якої існує такий δ-окіл, усі точки якого не належать множині.

Межа

- це сукупність усіх межових точок.

Межова точка області

- це точка, будь-який окіл якої містить точки, які належать і не належать області.

Неперервна функція двох змінних $f(x;y)$ у точці $(x_0;y_0)$

- це функція, яка визначена на множині $D \in R^2$, і для якої $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x;y) = f(x_0;y_0)$.

Область

- це множина, для якої виконуються умови:

1)кожна точка множини - внутрішня точка;

2)будь-які дві точки множини можна сполучити ламаною, усі точки якої належать множині.

Обмежена множина

- це множина, яка лежить повністю всередині деякого кола скінченного радіуса.

Повний диференціал функції двох змінних $z = f(x;y)$

обчислюється за формулою $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$.

Повний диференціал функції двох змінних

- це головна лінійна частина приросту функції, тобто $A\Delta x + B\Delta y$ або $z'_x\Delta x + z'_y\Delta y$.

Повний приріст

- це різниця $f(x_0+\Delta x;\ y_0+\Delta y)-f(x_0;\ y_0)$, де Δx, Δy - прирости, що надаються точці $(x_0;\ y_0)$ так, щоб точка $(x_0+\Delta x;\ y_0+\Delta y)$ не виходила за межі околу точки $(x_0;\ y_0)$.

Упорядкована пара чисел $(x_0;y_0)$

- це множина з двох чисел x_0 та y_0, якщо зазначено, яке з цих чисел вважається першим, а яке-другим.

Функція двох змінних $z=f(x;y)$

вважається заданою, якщо кожній точці множини *D*, що належить площині, поставлено у відповідність за деяким законом одне і тільки одне дійсне число $z\in R$.