Міністерство освіти та науки України
Харківський національний університет
радіоелектроніки

Калінін Віталій Веніамінович

1. Електромагнетизм.

Харків
2008

Зміст

Теорія ... 3
- 1.1 Електричні заряди ... 3
- 1.2 Електричне поле. Напруженість електричного поля ... 3
- 1.3 Принцип суперпозиції для напруженості електричного поля ... 5
- 1.4 Лінії напруженості електричного поля. Потік вектора напруженості ... 5
- 1.5 Теорема Остроградського - Гаусса ... 7
- 1.6 Робота при переміщенні заряду в електростатичному полі. Потенціал ... 9
- 1.7 Взаємозв'язок напруженості та потенціалу ... 12
- 1.8 Електричний диполь ... 14

Практика ... 17
- Контрольні запитання до глави ... 17
- Вправи та задачі до глави 1 ... 17

Теорія

1.1 Електричні заряди.

Електричний заряд - невід'ємна властивість деяких елементарних частинок, кількісна міра електромагнітної взаємодії тіл. Дослідним шляхом встановлено основні властивості зарядів. Існують два роди зарядів - позитивні та негативні, носіями яких є елементарні частинки. Заряд - внутрішня характеристика елементарних частинок, які є

носіями найменшої в природі порції заряду (кванта заряду) $q = 1.6 \cdot 10^{-19}\,Кл$.

Тобто заряд - величина дискретна. Заряд довільного зарядженого тіла кратний елементарному заряду: $q = \pm n \cdot e$, де n - ціле чисто. Стабільною елементарною частинкою, яка має найменший негативний заряд, є електрон. Електрони в певній кількості входять до складу атомів всіх хімічних елементів. Електричний заряд атома, в цілому, дорівнює нулю, оскільки заряд ядра атома позитивний і дорівнює негативному заряду електронів. Атом, який віддав або приєднав до себе один чи декілька електронів, стає однозарядним або багатозарядним іоном. Тіла, заряджені негативно, мають надлишок електронів, а заряджені позитивно - їх недостачу. Закон збереження електричного заряду - один з фундаментальних фізичних законів, у відповідності якому в ізольованій системі алгебраїчна сума зарядів залишається незмінною:

$$\sum_{i=1}^{N} q_i = const \qquad (1.1)$$

Електричний заряд - релятивістський інваріант, скалярна величина. Одиницею вимірювання заряду в СІ є кулон (Кл).

Однойменно заряджені тіла відштовхуються, а різнойменно заряджені - притягуються. Закон взаємодії у вакуумі двох нерухомих заряджених матеріальних точок (точкових зарядів) встановлено Ш.Кулоном (1736 -1806рр). Закон Кулона у векторному вигляді в одиницях СІ можна записати так:

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\frac{r_{12}}{r_{12}}, \qquad (1.2)$$

де $\vec{F}_{12}$ - сила взаємодії точкових зарядів q_1 та q_2 ;

$\vec{r}_{12}$ -вектор, проведений від заряду 1 до заряду 2;

$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\,Кл^2 \cdot Н^{-1} \cdot м^{-2}$ - електрична стала;

1.2 Електричне поле. Напруженість електричного поля.

Відповідно до сучасних уявлень про електричну взаємодію тіл, що базуються на ідеї близькодії, потрібно припустити наявність в просторі між зарядами фізичної субстанції за допомогою якої відбувається ця взаємодія. Цей матеріальний об'єкт, який оточує будь-який електричний заряд - електричне поле. Одна із основних властивостей електростатичного поля (поля нерухомих зарядів) полягає в тому, що поле діє з певною силою на будь-який заряд, внесений в дану точку поля.

Силовою характеристикою електричного поля є напруженість $\vec{E}$.
Будемо досліджувати електростатичне поле за допомогою пробного заряду q_0 - точкового позитивного заряду. Для того, щоб пробний заряд не викликав перерозподілу зарядів, які створюють поле, величина його повинна бути достатньо малою.

Вектором напруженості електричного поля в данній точці називають фізичну величину, яка дорівнює відношенню сили, з якою електричне поле діє на пробний заряд, внесений в цю точку (рис. 1.1), до величини цього заряду:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad (1.3)$$

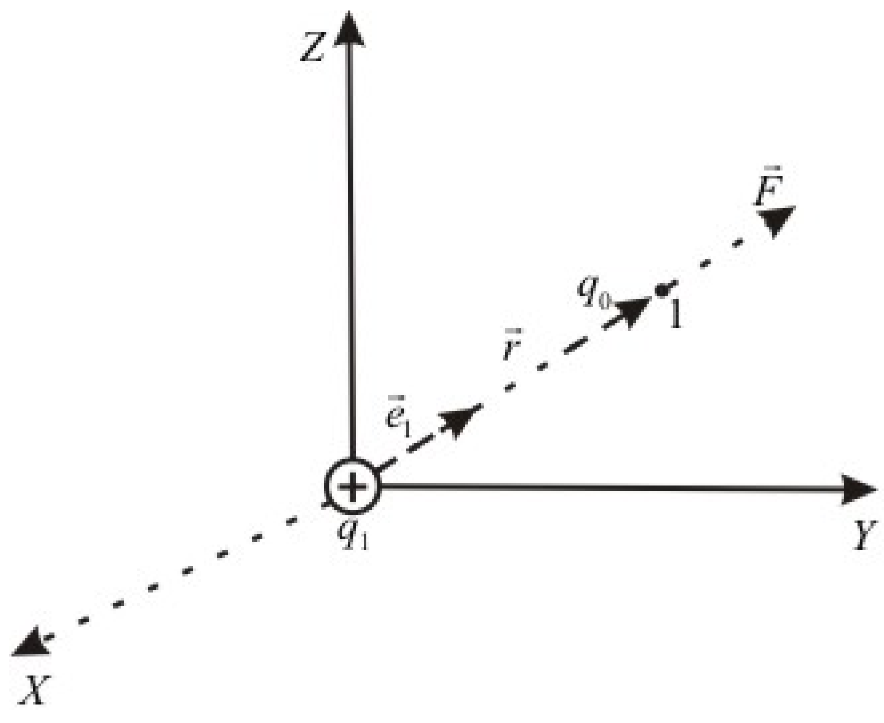

Рисунок 1.1

Одиницею напруженості в СІ є В/м. На рис. 1.1 показано напрям сили $\vec{F}$, яка діє на пробний заряд q_0 , в точці і з боку точкового заряду q_1 . Вектор напруженості в точці 1 $\vec{E}_1$ не залежить від величини пробного заряду q_0 , що легко довести, використовуючи (1.3) та(1.2):

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1^2}\vec{e}_r$$

Метод дослідження поля за допомогою пробного заряду є одним з основних методів дослідження електричного поля.

1.3 Принцип суперпозиції для напруженості електричного поля.

Якщо в деяких точках простору є точкові заряди q_1 , q_2 , ... q_n , то, використовуючи метод дослідження поля за допомогою пробного заряду, можна знайти сили кулонівської взаємодії $\vec{F}_i$ пробного заряду з кожним зарядом системи:

$$F_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i \cdot q_0}{r_i^2}\frac{r_i}{r_i}$$

Принцип суперпозиції механічних сил

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i$$

разом з формулою (1.3) дають:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N}\vec{E}_i \quad (1.4)$$

Рівняння (1.4) - це принцип суперпозиції напруженості електричного поля: напруженніть поля, створеного системою точкових зарядів, дорівнює векторній сумі напруженостей полів, що створюються в даній точці кожним із зарядів системи. Заряджене тіло скінченних розмірів можна уявити системою точкових зарядів dq , неперервно розподілених в просторі з певною густиною заряду (лінійною$\tau = dq/dl$; поверхневою $\sigma = dq/dS$; об'ємною $\rho = dq/dV$). Якщо, наприклад, заряди розподілено в просторі з об'ємною густиною $\rho = dq/dV$, то об'єм dV - фізично малий об'єм, тобто в межах цього об'єму $\rho = const$. Заряд цього об'єму дорівнює $dq = \rho dV$, а напруженність поля, створеного зарядом dq -

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}.$$

Тоді напруженість поля, створеного зарядженим тілом, дорівнює

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\vec{e}_r. \quad (1.5)$$

1.4 Лінії напруженості електричного поля. Потік вектора напруженості.

Метод зображення електростатичного поля за допомогою ліній напруженості запропоновано видатним англійським фізиком М.Фарадеєм (I791-I867рр.). ***Лінією напруженості***, або силовою лінією, називають лінію, дотична до якої в будь-якій точці збігається з напрямом напруженості $\vec{E}$. Ці лінії напрямлені від позитивних зарядів (або з нескінченності) до негативних зарядів (або сягають у нескінченність). Умовились проводити лінії напруженості з такою густотою, щоб кількість ліній, які пронизують одиницю площі поверхні, перпендикулярної до ліній напруженості, чисельно дорівнювала б модулю напруженості E. Якщо лінії напруженості визначено таким чином, то можна ввести поняття потоку напруженості. Так, ***потоком напруженості*** через поверхню S називають фізичну величину, яка чисельно дорівнює кількості ліній напруженості, які пронизують цю поверхню. Потік силових ліній однорідного електричного поля через площину S, нормаль до якої дорівнює $\vec{n}$, записують так:

$$\Phi_E = |\vec{E}||\vec{S}|\cos(\vec{n} \wedge \vec{E}) = (\vec{E},\vec{S}). \quad (1.6)$$

де $\vec{S} = S \cdot \vec{n}$, S - площа даної площини. Для того, щоб визначити потік напруженості неоднорідного електричного поля через поверхню S довільної форми, застосовують такий прийом (використовуючи формулу (1.6)): розбивають поверхню S на елементарні поверхні dS, такі малі, щоб кожну з них можна було б вважати плоскою (з вектором нормалі $\vec{n}$), а поле в межах поверхні dS було б однорідним $(\vec{E} = const)$. Тоді потік через поверхню dS дорівнює

$$d\Phi = (\vec{E}, d\vec{S}).$$

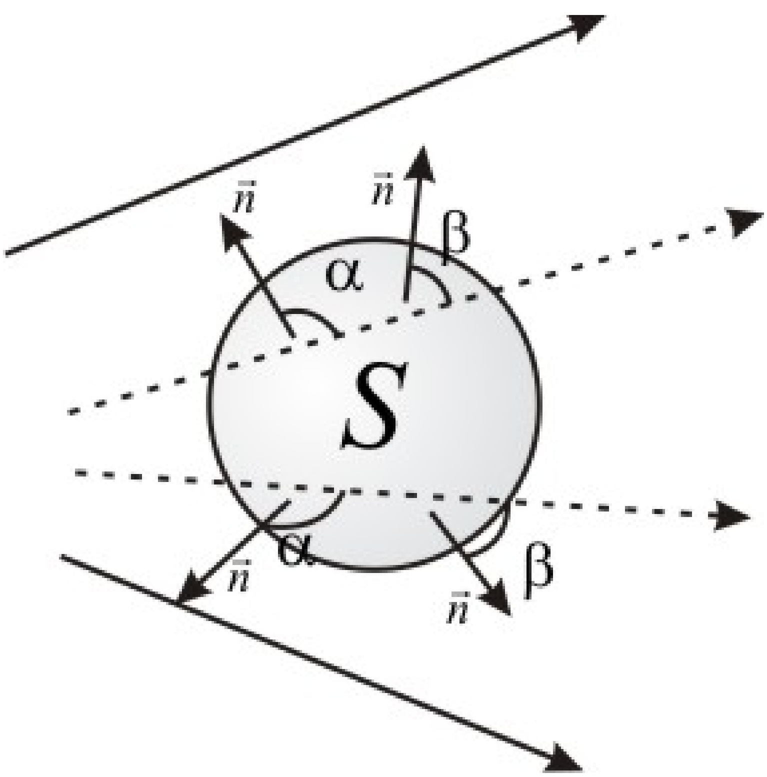

Рисунок 1.2

Знаходячи суму потоків $d\Phi$ по всій поверхні S, визначимо

$$\Phi_E = \int_S d\Phi = \int_S \vec{E}d\vec{S}. \quad (1.7)$$

Якщо поверня S замкнута, то за додатний напрям нормалі $\vec{n}$ беруть напрям зовнішньої нормалі, а потік напруженості через таку поверхню дорівнює (знак $\oint$ означає, що інтегрування ведуть по замкнутій поверхні):

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}d\vec{S}. \quad (1.8)$$

На рис. 1.2 показано, що потік ліній, які входять до поверхні S від'ємний ($\cos\alpha < 0$), а потік ліній, які виходять з поверхні S - додатний ($\cos\beta > 0$).

1.5 Теорема Остроградського - Гаусса.

Цю теорему формулюють так: потік вектора напруженості електричного поля через довільну замкнуту поверхню у вакуумі дорівнює алгебраїчній сумі зарядів всередині цієї поверхні, поділеній на електричну сталу ε_0

$$\oint_S \vec{E}dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i$$

Для доведення цієї теореми розлянемо спочатку точковий заряд q, що знаходиться в центрі сферичної поверхні радіусом R. Тоді, відповідно до формули (1.8). одержимо

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = \int \left|\vec{E}\right|\left|d\vec{S}\right|\cos(\vec{n} \wedge \vec{E}). \quad (1.9)$$

Для всіх точок поверхні сфери S виконуються умови:

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2} = const, \qquad \cos(\vec{n} \wedge \vec{E}) = 1. \quad (1.10)$$

Використовуючи (1.9) та (1.10). одержимо:

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Потік Φ_E не зміниться, якщо переміщувати заряд всередині поверхні: змінювати форму та розміри замкнутої поверхні. Це зумовлено тим, що не змінюється заряд та кількість ліній напруженості поля цього заряду. Розміщення всередині замкнутої поверхні системи зарядів

$q_1, q_2 \ldots q_n$ є причиною виникнення напруженостей $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \ldots \vec{E}_N$ та відповідних потоків $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_N$. Тоді, внаслідок принципу суперпозиції (1.4):

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S \vec{E}_1 d\vec{S} + \oint_S \vec{E}_2 d\vec{S} + \ldots + \oint_S \vec{E}_N d\vec{S}.$$

$$\sum_{i=1}^{N} \Phi_i = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i;$$

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i.$$

Якщо електричне поле створюється зарядами, розподіленими в просторі з певною об'ємною густиною ρ, то заряд об'єму V, який обмежує вибрана замкнута поверхня дорівнює:

$$q = \int_V \rho dV,$$

де $\rho = dq/dV$.

В цьому випадку теорему Остроградського - Гаусса можна записати в інтегральному вигляді:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV. \qquad (1.11)$$

Зменшуючи розміри замкнутої поверхні S в (1.11), зменшуємо і об'єм V, обмежений цією поверхнею, який наближається до точки. Тоді праву частину (1.11) можна записати так:

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV \approx \frac{1}{\varepsilon_0} < \rho > V, \qquad (1.12)$$

де $< \rho >$ - середня об'ємна густина заряду в малому об'ємі V. Поділимо рівняння (1.11) на об'єм V, який обмежує поверхня S, та знайдемо границю при $V \to 0$

$$\lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \int_V \rho dV. \qquad (1.13)$$

Величина, що знаходиться в лівій частині цього рівняння називається дивергенцією вектора $\vec{E}$ та позначається:

$$div \vec{E} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_S \vec{E} d\vec{S}. \qquad (1.14)$$

За означениям дивергенція вектора $\vec{E}$ - границя відношення потоку вектора $\vec{E}$ до об'єму V, з якого витікає цей потік, якщо об'єм $V \to 0$, (тобто об'єм перетворюється в точку). Тоді ***дивергенція*** - скалярна величина, яка дорівнює питомій потужності джерела поля в цій точці.

Означення (1.14) дивергенції вектора $\vec{E}$ не залежить від вибору системи координат, але вираз для дивергенції, як скалярної функції координат, буде різним в різних системах координат. В декартовій системі координат

$$div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Цей вираз можна записати інакше, якщо ввести векторний диференціальний оператор набла ∇ (оператор Гамільтона):

$$\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}.$$

Тоді дивергенція вектора $\vec{E}$ дорівнює скалярному добутку оператора ∇ на вектор $\vec{E}$:

$$div\vec{E} = \nabla \cdot \vec{E}.$$

В правій частині рівняння (1.13) при наближенні об'єму до нуля одержимо (враховуючи (1.12)): середня об'ємна густина заряду $< \rho >$ наближається до ρ - об'ємної густини заряду в даній точці. Тоді (1.13) запишемо

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \qquad (1.15)$$

Рівняння (1.15) - теорема Остроградського-Гаусса в диференціальному вигляді: дивергенція вектора $\vec{E}$ для деякої точки поля дорівнює об'ємній густині заряду ρ в цій точці, поділеній на електричну сталу ε_0 .

1.6 Робота при переміщенні заряду в електростатичному полі. Потенціал.

Визначимо роботу, яку виконують сили електростатичного поля, створеного точковим позитивним зарядом q_l із точки B в точку C по криволінійній траєкторії l (рис. 1.3). Розбиваємо траєкторію l руху заряду q_0 на нескінченно малі переміщення $d\vec{l}$, в межах яких кулонівську силу взаємодії зарядів

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_0}{r^2}\vec{e}_r,$$

можна вважати сталою.

ю.

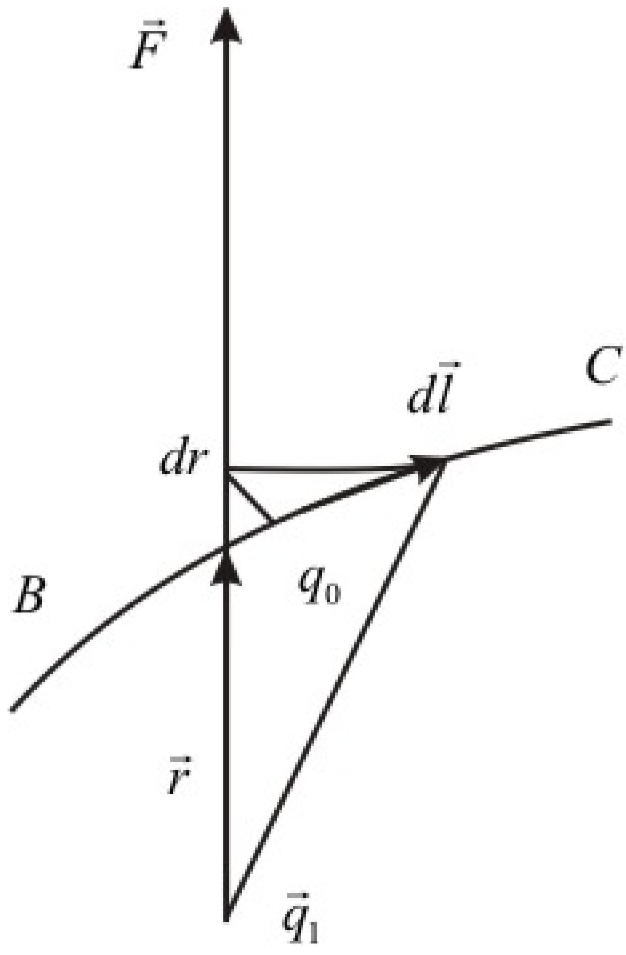

Рисунок 1.3

Знаходимо елементарну роботу такої сили при переміщенні пробного заряду на $d\vec{l}$:

$$dA = \vec{F}d\vec{l}\,.$$

Робота при переміщенні від B до C дорівнює інтегральній сумі елементарних робіт

$$A_{BC} = \int\limits_{l} dA = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_0}{r^2}\vec{e}_r d\vec{l}\,.$$

Скалярний добуток $\vec{e}_r d\vec{l}$ дорівнює

$$\vec{e}_r d\vec{l} = |\vec{e}_r|\left|d\vec{l}\right|\cos\alpha = dl\cos\alpha = dr.$$

Тоді

$$A_{BC}=\frac{q_1 q_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_B}^{r_C}\frac{dr}{r^2}=\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_C}). \qquad (1.16)$$

Аналізуючи (1.16), можна зробити висновки: робота сил електричного поля не залежить від форми траєкторії, а залежить тільки від положення початкової B та кінцевої C точок переміщення; робота залежить від величини зарядів q_0 та q_l ; електростатичне поле точкового заряду є полем центральних сил. Тобто електростатичне поле є потенціальним. Тоді кожній точці поля відповідає незалежна від часу функція координат - потенціал φ . Потенціал є енергетичною характеристикою поля.

Як відомо з механіки, робота консервативної сили дорівнює зменшенню потенціальної енергії:

$$A_{BC}=-\Delta W=W_B-W_C. \qquad (1.17)$$

Порівнявши (1.17) з (1.16), знаходимо, що потенціальна енергія взаємодії точкових зарядів q_0 та q_l , дорівнює

$$W=\frac{q_1 q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}+const. \qquad (1.18)$$

Потенціальна енергія, як відомо, визначається з точністю до сталої величини. Ця стала в (1.18) пов'язана з вибором рівня відліку потенціальної енергії. Якщо вважати, що енергія пробного заряду q_0 дорівнює нулю в точках, нескінченно віддалених від заряду q_l , то стала в (1.18) дорівнює нулю.

Тоді потенціалом електростатичного поля в даній точці назвемо відношення потенціальної енергії пробного заряду до величини цього заряду:

$$\varphi=\frac{W}{q_0}. \qquad (1.19)$$

Одиниця вимірювання потенціалу - вольт (В).Потенціал φ як і потенціальну енергію W , визначено з точністю до сталої величини. Якщо потенціал поля в точках, нескінченно віддалених від точкового заряду вважати рівним нулю, то потенціал поля точкового заряду дорівнює

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}.$$

Робота сил електростатичного поля пов'язана з різницею потенціалів точок, між якими переміщується заряд q_0 :

$$A_{BC}=W_B-W_C=q_0(\varphi_B-\varphi_C). \qquad (1.20)$$

Розв'язати основну задачу електростатики можливо, якщо визначено потенціал довільної точки поля, створеного системою точкових зарядів. Потенціал - величина алгебраїчна, тому принцип суперпозиції для потенціалу

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i}.$$

Потенціал даної точки електростатичного поля, що створюється системою точкових зарядів, дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів поля, створеного в цій точці кожним із зарядів.

Розподіл потенціалів у просторі графічно зображають за допомогою еквіпотенціальних поверхонь. Еквіпотенціальною поверхнею називають уявну поверхню, у всіх точках якої потенціал однаковий.

Знайдемо роботу dA переміщення заряду q вздовж еквіпотенціальної поверхні на відстань $d\vec{l}$:

$$dA = \vec{F}d\vec{l} = q\vec{E}d\vec{l}. \qquad (1.21)$$

Із формули (1.20) одержимо

$$dA = -qd\varphi = 0.$$

тому, що для еквіпотенціальної поверхні $d\varphi = 0$. Тоді із (1.21) ,$\vec{E}d\vec{l} = 0.$ тобто вектор напруженості $\vec{E}$ перпендикулярний $d\vec{l}$: лінії напруженості перпендикулярні еквіпотенціальним поверхням.

1.7 Взаємозв'язок напруженості та потенціалу.

Перемістимо заряд q вздовж деякої лінії dl між двома точками, різниця потенціалів яких дорівнює $d\varphi$. Тоді роботу по переміщенню заряду знайдемо за формулами:

$$dA = q\vec{E}d\vec{l}; \qquad dA = -qd\varphi.$$

Звідки одержимо

$$d\varphi = -\vec{E}d\vec{l},$$

а після інтегрування:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_1^2 \vec{E}d\vec{l}. \qquad (1.22)$$

Інтеграл (1.22) можна взяти вздовж будь-якої лінії, яка з'єднує точки 1 та 2, адже робота сил електростатичного поля не залежить від форми траєкторії. Якщо точки 1 та 2 в (1.22) збігаються, то криволінійний інтеграл беремо по замкнутому контуру, а $\varphi_2 = \varphi_1$: $\oint \vec{E}d\vec{l} = 0.$ (1.23)

Інтеграл (1.23) називають циркуляцією вектора $\vec{E}$. Тобто циркуляція вектора напруженості електростатичного поля дорівнює нулю. Умова (1.23) є необхідною та достатньою умовою потенціальності електростатичного поля.

Сила, що діє на пробний заряд в полі, дорівнює

$$\vec{F} = q_0\vec{E}$$

Потенціальна енергія цього заряду в полі -

$$W = q_0\varphi.$$

З механіки відомо, що сила та потенціальна енергія пов'язані формулою

$$F = -gradW.$$

де

$$gradW = \nabla W = \vec{i}\frac{\partial W}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial W}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial W}{\partial z}.$$

Тоді для електростатичного, поля

$$q\vec{E} = -\nabla(q\varphi)$$

або

$$E = -\nabla\varphi. \qquad (1.24)$$

Напруженість електростатичного поля дорівнює градієнту потенціалу, взятому із знаком мінус. Зауважимо, що векторне рівняння (1.24) можна записати як три скалярних:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}; \qquad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}; \qquad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Скалярний добуток $\vec{E}d\vec{l} = E_l dl$, де E_l -проекція вектора напруженності на напрямок l ,$dl = \left|d\vec{l}\right|$.Тоді

$$E_l dl = -d\varphi.$$

$$E_l = -\frac{d\varphi}{dl}. \qquad (1.25)$$

Тобто проекція вектора напружености на довільний напрямок l дорівнює швидкості зменшення потенціалу при переміщенні в напрямі l .

Формули (1.22), (1.24), (1.25) виражають взаємозв'язок силової характеристики - напружености та енергетичної характеристики поля - потенціалу.

1.8 Електричний диполь.

Електричним диполем (або двополюсником) називають систему двох точкових зарядів, однакових за величиною та протилежних за знаком $+q$, $-q$, розташованих на відстані l один від одного. Цю відстань l вважаємо набагато меншою за відстань r від диполя до точок, в яких розглядають поле диполя. Пряма, яка з'єднує заряди, називається віссю диполя, а вектор, напрямлений від негативного заряду до позитивного, модуль якого дорівнює відстані між зарядами - плечем диполя $\vec{l}$. Тоді електричним моментом диполя $\vec{p}$ називають добуток заряду q на плече диполя $\vec{l}$:

$$\vec{p} = q\vec{l}.$$

Модель електричного диполя дозволяє задовільно описати електричні властивості багатьох атомів та молекул, таких, наприклад, як молекули води, кислот, основ та ін.; системи іскрових розрядників та антен.

Знайдемо потенціал φ поля диполя в точці O (рис. 1.4). Заряди $+q$ та $-q$

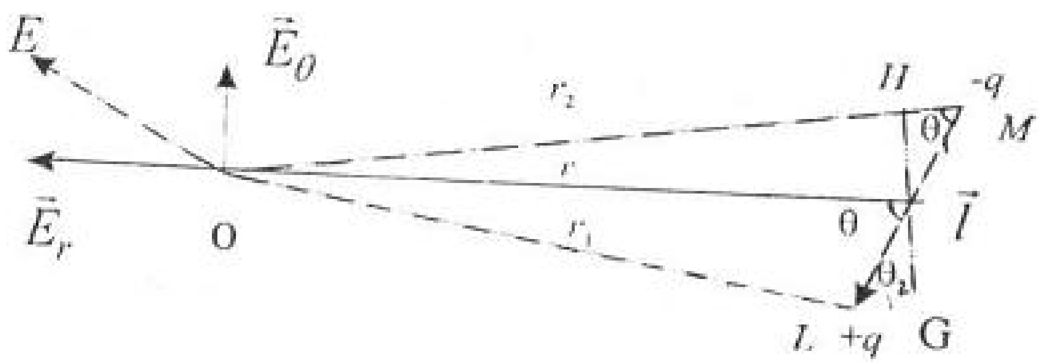

Рисунок 1.4

знаходяться в точках L та M , плече диполя $\vec{l}$, відстань до точки O

дорівнює r .

Якщо $r \gg l$, то відстані r_1 та r_2 майже однакові:

$$r_1 \approx r_2 \approx r.$$

При цьому $\theta_1 \approx \theta_2 \approx \theta$. GH можна вважати відрізком прямої, перпендикулярної до r . З рис. 1.4 знаходимо:

$$r_1 = r - LG = r - \frac{l}{2}\cos\theta;$$

$$r_2 = r + MH = r + \frac{l}{2}\cos\theta,$$

звідси

$$r_2 - r_1 = l\cos\theta;$$

$$r_1 r_2 = r^2 - \frac{l^2}{4}\cos^2\theta \approx r^2.$$

Використовуючи принцип суперпозиції для потенціалу знаходимо:

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2};$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}. \quad (1.26)$$

Щоб визначити напруженість E поля диполя в точці O, знайдемо спочатку складові напруженості в напрямку $r - E_r$, та в перпендикулярному напрямку -E_θ (рис. 1.4). Тоді

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2}.$$

Складові E_r та E_θ знаходимо, використовуючи (1.25):

$$E_r = -\frac{d\varphi}{dl} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^3}.$$

При переміщенні диполя на dl в напрямі HG, перпендикулярному до

$r = const$ кут θ зміниться на $d\theta$, а $dl = rd\theta$. Тоді

$$E_\theta = -\frac{d\varphi}{dl} = -\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3};$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\sqrt{4\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\sqrt{3\cos^2\theta + 1}. \qquad (1.27)$$

Аналізуючи (1.27), бачимо, що на однаковій відстані від центра диполя напруженість міняється від $E_{\max} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3}$. - на осі диполя $(0 = 0)$ до $E_{\min} = \frac{1}{2}E_{\max}$ - вздовж перпендикуляра до осі. Поле диполя зменшується із зменшенням відстані r швидше, ніж для точкового заряду:

$$E \sim \frac{1}{r^3}.$$

В однорідному електричному полі на обидва полюси диполя діють однакові та протилежно напрямлені сили $F = \pm qE$ які створюють пару сил з моментом

$$N = Fl\sin\alpha = qlE\sin\alpha = pE\sin\alpha,$$

де α - кут між векторами $\vec{p}$ та $\vec{E}$

Тоді механічний момент пари сил є векторним добутком

$$\vec{N} = \left[\vec{p}, \vec{E}\right]. \quad (1.28)$$

Це означає, що при $\alpha < \frac{\pi}{2}$ диполь буде втягуватись в область

більшої напруженості з силою

$$f = ql\frac{dE}{dx}\cos\alpha = p\frac{dE}{dx}\cos\alpha, \quad (1.29)$$

а при $\pi > \alpha > \frac{\pi}{2}$ - виштовхуватись з області більшої напруженості.

Практика

Контрольні запитання до глави.

1.Як визначається закон збереження заряду?

2.Що означає квантовий характер зарядів?

3.Якою формулою визначається вектор сили Кулона?

4.Як визначається вектор напруженності електростатичного поля у будь-якій точці?

5.Якою формулою визначається напруженність електричного поля точкового заряду?

6.Який зміст та вигляд принципу суперпозиції напруженності електричного поля?

7.Що називають лінією вектору E напруженності електричного поля?

8.Який зміст та яка формула потоку вектора напруженності довільного поля крізь будь-яку поверхню?

9.Яке визначення має теорема Остроградського-Гаусса?

10.Який зміст, характер та назву має теорема , що відповідає виразу $divE$?

11.Від чого залежить робота переміщення заряду в електричному полі?

12.Якими формулами визначаються робота відносного перміщення двох точкових зарядів та енергія такої системи?

13.Яке визначення потенціалу та різниці потенціалів?

14.Як визначається принцип суперпозиції для потенціалу?

15.Яке поле називають потенціальним?

16.Якою є основна формула електростатики та її зміст?

17.Що називають циркуляцією E ?

18.Як зв'язані силова та енергетична характеристики електростатичного поля?

19.Чому дорівнює електричний момент диполя та який напрям він має?

20.Які сили діють на диполі в однорідному та неоднорідному електричних полях?

Вправи та задачі до глави 1.

1.Знайти силу електростатичної взаємодії ядра атома водню з електроном.Радіус атома водню $r = 0,5 \cdot 10^{-10} \text{м}$.

Відповідь: F=92,3 нН.

2.У вершинах квадрата знаходяться чотири однакових однойменних заряди q.Який заряд Q треба помістити у центр квадрата, щоб система знаходилася у рівноважному стані?Чи буде ця рівновага стійкою?

Відповідь: $Q = -q / 4(1 + 2\sqrt{2});$ рівновага не стійка.

3.Знайти напруженість Е електричного поля у точці, що лежить посередині між двома точковими зарядами $q_1 = 8 нКл$ і $q_2 = -6 нКл.$ Відстань між зарядами r=10см, ε =1.

Відповідь:Е=50.4 кВ/м.

4.Яку величину має електричний потік напруженості Е через поверхню іонізованого атома водню?Визначити напруженість Е та потенціал φ електричного поля на цій поверхні.Радіус атома $0.5 \cdot 10^{-10} \text{м}$.

Відповідь:$\Phi = 1.8 \cdot 10^{-8} Вм$ **,** $E = 56 \cdot 10^{-10} Вм, \varphi = 28 В$ **.**

5.Точковий заряд $q = 10 нКл$, що знаходиться у точці М електричного поля має потенціальну енергію $W = 10 мкДж.$ Визначити потенціал φ цієї точки.

Відповідь: $\varphi = 1 кВ.$

6.Два електрони рухаються назустріч один одному з відповідною швидкістю V=10^6 м/с.Визначити їх відносну енергію у джоулях та електрон-вольтах. До якої мінімальної відстані r_m вони можуть зблизитися?

Відповідь:$W = 1,8 \cdot 10^{-8} Вм. E = 56 \cdot 10^{-10} Вм, \varphi = 28 В.$

7.Дві нескінченні паралельні площини знаходяться на відстані d=0,5 см одна від одної.На них рівномірно позподілені заряди з поверхневою гучтиною σ_1 =0,2 $мкКл/м^2$ та $\sigma_2 = -0,3$ $мкКл/м^2$. Визначити розподіл напруженностей у тьох просторах відносно перпендикулярної осі та різницю потенціалів U між потенціалами.

Відповідь:$\sigma_I = 5,6 \cdot 10^3 В/м$ $\sigma_{III} = 28,2 \cdot 10^3 В/м$ U=141В.

8.Між двома вертикальними пластинами , що знаходяться у вакуумі навідстані d=1см одна від одної, на нитці висить заряджена бузинова кулька масою m=0,1г.Після встановлення між пластинами різниці потенціалів U=1кВ нитка з кулькою відхилилась від вертикалі на кут $\alpha = 10^o$.Знайти заряд q кульки.

Відповідь:q=1,73 нКл.

9.На відстані $r_1 = 4см$ від нескінченно довгої зарядженної нитки знаходиться точковий заряд $q = 0,66нКл$.Під дією поля заряд наближається до нитки на відстань $r_2 = 2см$ при цьому виконується робота $A = 5 \cdot 10^6 Н$. Знайти лінійну густину τ заряду на нитці.

Відповідь:$\tau = 0,6мкКл/м.$

10.Тонке кільце радіусу R=10см рівномірно заряджене зарядом $q = 6,28нКл.$ Визначити потенціал φ електричного поля у точці М, що лежить на вісі кільця на відстані d=5 см від центру.

Відповідь: φ =160 В.

11.Визначити напруженність Е електирчного поля кільця попередньої задачі 10 у точці М.

Відповідь: Е=63 В/м.

12.Тонкий диск радіусом R=5 см рівномірно заряджений з поверхневою густиною σ =127 $нКл/м^2$. Визначити потенціал φ та напруженність електричного поля у точці N, що лежить на вісі диска , на відстані d=5см від центру.

Відповідь:φ =144В, Е=$2 \cdot 10^3$ В\м.

13.Диполь з електричним моментом ρ =100пКл/м вілно зорієнтувався вздовж силових ліній однорідного електростатичного поля напруженністю Е=50кВ/м.Визначити зміну ротенціальної енергії диполя у випадку відхилення на кут $\alpha = 60^o$.

Відповідь: $\Delta W = 2,5 мкДж.$

14.Чому не можна утворити електростатичне поле , силові лінії якого однаково спрямовані, але мають змінну густину?

Відповідь: циркуляція вектора напруженності Е (по спрощенному прямокутному шляху) у такому полі не дорівнює нулю . Таке поле не буде потенціальним, тобто електромтатичним.

15.Електричне поле у вакуумі створюється циліндром радіусу R=1см з об'ємною густиною заряду ρ =2 $мкКл/м^3$. Знайти напруженність Е поля у точках 1 та 2, що лежать на відстані $r_1 = 0,5 см$ та $r_2 = 3 см$ від осі циліндра.

Відповідь: $E_1 = \rho r_1 / 2 / \varepsilon_0 = 0,55 \cdot 10^3 В/м$

$$E_2 = \rho R^2 / 2 / \varepsilon_0 / r_2 = 0,37 \cdot 10^3 В/м$$